

基于浮动映射拓扑优化的结构应力最小化设计

周德生, 闫晓磊, 黄登峰, 花海燕, 王辉

(福建省汽车电子与电驱动技术重点实验室, 福建 福州 350118)

摘要: 以全局 Mises 应力水平最小化为设计目标, 通过引入应力凝聚函数解决应力局部化问题, 基于浮动映射拓扑优化 (floating projection topology optimization, FPTO) 方法, 并采用应力松弛技术克服单元应力奇异现象, 实现结构全局应力最小化设计。数值算例结果显示, 经过应力最小化设计, 结构的峰值应力可以降低 25.32%~36.49%, 而柔度仅增加了 2.20%~5.87%, 验证了该文提出的应力设计方法的有效性。

关键词: 拓扑优化; 浮动映射; 应力奇异; P 范数

中图分类号: TU311

文献标志码: A

文章编号: 2097-3853(2024)04-0387-06

Structural stress minimization design based on floating projection topology optimization

ZHOU Desheng, YAN Xiaolei, HUANG Dengfeng, HUA Haiyan, WANG Hui

(Key Laboratory for Automotive Electronics and Electric Drive of Fujian Province, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China)

Abstract: Aiming at minimizing the global Mises stress level, the resolution of stress localization issues is addressed through the incorporation of a stress concentration function. Based on the floating projection topology optimization (FPTO) method, the stress relaxation technique is used to overcome the singularity of element stress, and the global stress minimization design of the structure is realized. Numerical examples demonstrate that through stress minimization design, peak stresses in the structure can be reduced by 25.32% to 36.49%, with a marginal increase in flexibility ranging from 2.20% to 5.87%. These findings validate the effectiveness of the proposed stress design method.

Keywords: topology optimization; floating mapping; stress singularity; P-norm

拓扑优化研究大多致力于以最小化结构柔度为目标的刚度设计。为避免结构发生断裂、疲劳和塑性变形等破坏, 可以考虑最小化结构应力的拓扑优化设计。对于应力计算的奇异性和局部性, 国内外学者提出了一些有效的解决办法。

针对应力奇异问题, Le 等^[1]提出一种类似 SIMP 的应力松弛插值方案, 通过生成平滑可行的设计空间解决应力奇异问题; 龙凯等^[2]基于 ICM 方法, 采用幂指数惩罚模型消除应力约束的奇异性以解决应力约束拓扑优化问题; Xia 等^[3]利用 BESO 方法的离散性避免了众所周知存在于连续

变密度法的“奇点”问题, 进行应力最小化设计。

在处理应力局部性方面, Han 等^[4]提出利用 P 范数凝聚函数将局部应力全局化; Jiang 等^[5]基于参数化水平集方法, 建立了应力最小化和应力约束问题的数学模型, 将 P 范数函数作为两个问题的应力聚合函数, 对于应力约束问题, 采用自适应缩放约束法测量结构中的最大应力; 王超等^[6]基于改进的 SIMP 方法, 引入基于 P 范数的全局应力评估策略, 建立了材料体积和连通性约束下的结构应力最小化拓扑优化模型。

不同于其它拓扑优化方法, Huang^[8]提出的

收稿日期: 2023-12-23

基金项目: 福建省自然科学基金(2022J01921); 国家自然科学基金(52205340)

第一作者简介: 周德生(1998—), 男, 四川自贡人, 硕士研究生, 研究方向: 结构轻量化设计。

通信作者: 闫晓磊(1981—), 男, 河南许昌人, 教授, 博士, 研究方向: 优化算法、结构创新设计。

浮动映射拓扑优化 (FPTO) 方法, 采用线性材料插值模型, 通过对材料密度逐步施加映射约束, 最终得到边界清晰的结构拓扑, 收敛精度更高。本文采用 P 范数凝聚应力来评价结构全局应力, 基于 FPTO 方法构建应力拓扑优化模型, 进一步开展结构应力最小化设计研究。对比传统刚度设计, 二维和三维数值算例均得以实现。

1 应力优化问题分析

1.1 全局应力度量

相对于结构刚度及模态设计, 应力优化存在局部属性问题, 即应力是场量, 优化过程中应力极值位置始终在变化, 具有强烈的非线性。本文采用 P 范数 (p-norm, PN) 凝聚应力来评价结构的全局应力水平。

$$\sigma_{\text{PN}} = \left(\sum_{i=1}^N \sigma_{\text{vm},i}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

式中, σ_{PN} 为结构的凝聚应力, MPa; $\sigma_{\text{vm},i}$ 为第 i 个单元质心的 Mises 应力, MPa; p 为应力范数值, 取值大小自定义。由式 (1) 可看出, 当 p 趋于无穷大时, σ_{PN} 接近结构的最大 Mises 应力。但是较大的 p 值将导致凝聚函数的非线性, 引起迭代过程的振荡及收敛困难, 不利于优化问题的高效稳健求解。对于应力最小化目标, P 范数凝聚函数只需要捕捉最大应力的变化趋势, 而不是实际的最大应力值。应力范数 p 的选择需要在足够光滑和精确近似之间权衡, 以确定较为合理的值, 一般取值为 4~8。Mises 应力 $\sigma_{\text{vm},i}$ 通过式 (2) 计算。

$$\sigma_{\text{vm},i} = \left[(\sigma_{x,i})^2 + (\sigma_{y,i})^2 - \sigma_{x,i}\sigma_{y,i} + 3(\tau_{xy,i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

式中, 对于第 i 个单元, $\sigma_{x,i}$ 为 x 方向正应力, MPa; $\sigma_{y,i}$ 为 y 方向正应力, MPa; $\tau_{xy,i}$ 为 xy 平面切应力, MPa。

1.2 应力奇异问题分析

在拓扑优化过程中, 材料的删除通过减小单元设计变量 x_i 来实现。假设 x_i 减小为 αx_i 时 ($0 < \alpha < 1$), 在线性材料插值模型下, 该单元的材料弹性矩阵 \mathbf{D} 为:

$$\mathbf{D}(\alpha x_i) = \alpha \mathbf{D}(x_i) \quad (3)$$

在外部载荷不变的情况下, 单元位移 \mathbf{U}_i 将增大为:

$$\mathbf{U}_i(\alpha x_i) = \alpha^{-1} \mathbf{U}_i(x_i) \quad (4)$$

结合式 (3) (4), 此时的单元应力变为:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\alpha x_i) &= \mathbf{D}(\alpha x_i) \mathbf{B} \mathbf{U}_i(\alpha x_i) = \\ &= \alpha \mathbf{D}(x_i) \mathbf{B} \alpha^{-1} \mathbf{U}_i(x_i) = \sigma_i(x_i) \end{aligned} \quad (5)$$

式中, \mathbf{B} 为应变-位移矩阵。

从式 (5) 可看出, 随着材料的逐渐减少, 单元应力的大小并未发生改变, 在设计变量 x_i 趋于 0 时, 单元应力也依然存在, 这一现象就是应力奇异。

为克服应力奇异问题, 本文采用反向惩罚策略, 即用反向惩罚后的应力 σ_i 代替实际应力:

$$\sigma_i = x_i^q \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathbf{U}_i \quad (6)$$

式中, \mathbf{D}_0 为实体单元的弹性矩阵; q 为松弛因子或反向惩罚因子, 取 0.5。

从式 (6) 可看出, 当 $x_i = 1$ 时, 该式即为实体单元的应力; 当 $x_i = 0$ 时, 代表空单元, 应力值为 0; 当 $0 < x_i < 1$ 时, 应力较实际应力 ($x_i \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathbf{U}_i$) 偏大。对于应力最小化问题, 此应力惩罚策略将使优化向减少中间材料方向发展, 有利于拓扑的形成和收敛。

2 浮动映射拓扑优化 (FPTO) 方法

2.1 拓扑优化模型

基于 FPTO 方法, 建立以凝聚的 P 范数应力最小化为目标, 以结构体积分数为约束的结构拓扑优化模型为:

$$\text{find: } x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

$$\min: \sigma_{\text{PN}}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{K}(x_i) \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

$$V = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i} \leq V^*$$

$$\begin{cases} x_i = 1 & \text{when } x_i \in \Omega_1 \\ x_i = x_{\min} & \text{when } x_i \in \Omega_0; i = 1, 2, \dots, N \\ x_{\min} < x_i < 1 & \text{when } x_i \in \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

式中, x_i 取值范围为 $[x_{\min}, 1]$, 为避免矩阵奇异, 设 $x_{\min} = 0.001$; Ω_0 和 Ω_1 分别为空材料和实体; $\partial\Omega$ 为实体和空心之间的边界; \mathbf{F} 为外载荷, N; \mathbf{K} 为刚度矩阵; \mathbf{U} 为节点位移矢量, mm; N 为结构单元总个数; V_i 为单元 i 的体积; V 和 V^* 分别为材料体积分数及其约束值。

2.2 材料插值模型及灵敏度分析

在 FPTO 方法中使用无惩罚的材料插值模型:

$$E(x_i) = x_i E_0, x_i \in [x_{\min}, 1] \quad (8)$$

根据应力优化问题式(7),引入材料体积约束对应的拉格朗日乘子 Λ ,式(7)的极值条件可建立为:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial x_i} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$

式中,材料体积分数 V 的灵敏度为:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{V_i}{\sum V_i} \quad (10)$$

P 范数凝聚应力 σ_{PN} 对设计变量 x_i 的偏导数,可由链式求导法则计算:

$$\frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial \sigma_{vm,i}} \left(\frac{\partial \sigma_{vm,i}}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \quad (11)$$

式中,

$$\frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial \sigma_{vm,i}} = (\sigma_{PN})^{1-p} \cdot (\sigma_{vm,i})^{p-1} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{vm,i}}{\partial \sigma_i} = (\sigma_{vm,i})^{-1} \mathbf{A} \sigma_i \quad (13)$$

式中, \mathbf{A} 为应力系数矩阵, $\mathbf{A} = [1, -0.5, 0; -0.5, 1, 0; 0, 0, 3]$ 。

相应地,根据式(6)可得:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = q x_i^{q-1} \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathbf{U}_i + x_i^q \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathbf{L}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \quad (14)$$

式中, \mathbf{L}_i 为索引矩阵。

式(14)中的隐式项 $\partial \mathbf{U} / \partial x_i$ 可通过结构平衡方程得到:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} \quad (15)$$

将式(14)(15)代入式(11),整理可得:

$$\frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{q}{x_i} \frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial \sigma_{vm,i}} \left(\frac{\partial \sigma_{vm,i}}{\partial \sigma_i} \right)^T \sigma_i - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} \quad (16)$$

式中,伴随向量 λ 为下列伴随方程的解。

$$\mathbf{K} \lambda = \sum_{i=1}^N (x_i)^q \frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial \sigma_{vm,i}} (\mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathbf{L}_i)^T \frac{\partial \sigma_{vm,i}}{\partial \sigma_i} \quad (17)$$

得到目标函数和约束的灵敏度信息后,即可通过最优性准则(OC)来更新设计变量。为了避免棋盘格等数值不稳定现象,更新后的设计变量仍需要进行滤波处理,滤波过程可参考文献[9]。

2.3 浮动映射约束与边界光滑

采用无惩罚的材料插值模型式(8),可以避

免因问题改变而重新构造材料插值形式的问题,但要实现单元设计变量的0/1化设计,需要对其施加0/1约束。在FPTO算法中,此约束是通过Heaviside映射函数实现,即:

$$x_i^k = \frac{\tanh(\beta \cdot \text{th}) + \tanh[\beta(x_i - \text{th})]}{\tanh(\beta \cdot \text{th}) + \tanh[\beta(1 - \text{th})]} \quad (18)$$

式中,上标 k 表示当前迭代次数; th 为映射阈值,可通过确保映射前后材料体积不变来确定; $\beta > 0$ 为映射参数,用来调控映射函数的陡峭程度。为确保优化结果收敛,通常在映射后对设计变量施加移动限制, $x_{\min} \leq x_i^k(1 - \delta) \leq x_i^k \leq x_i^k(1 + \delta) \leq 1$,取 $\delta = 0.02$ 。

为得到具有光滑边界的拓扑构型,将单元变量 x_i^k 线性插值到整个设计域,得到任意一点 (s, t) 处的密度值 $v(s, t)$,而后构造水平集函数:

$$\varphi(s, t) = v(s, t) - \text{th} \begin{cases} > 0, (s, t) \in \Omega_1 \\ = 0, (s, t) \in \partial\Omega \\ < 0, (s, t) \in \Omega_0 \end{cases} \quad (19)$$

由水平集函数确定的结构拓扑具有光滑的边界,利于后续的制造加工。但在得到清晰的拓扑结构之前,式(19)确定的光滑拓扑与 x_i^k 确定的单元拓扑存在偏差。将此偏差定义为拓扑误差 τ :

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^k - v_i^k)^2 \quad (20)$$

式中, v_i^k 为光滑结构的单元设计变量,由单元内细化变量 $v(s, t)$ 体积加权得到。在优化过程中,根据式(20)控制 β 的更新,当误差 τ 小于给定值时,即可认为边界清晰、光滑的拓扑已得到, β 停止增加。

3 算例分析

通过二维和三维经典数值算例,验证所提出的结构应力最小化方法。算例的属性参数均定义为:材料弹性模量 $E = 110$ GPa,泊松比 $\nu = 0.342$,优化迭代过程中的过滤半径 $r_{\min} = 3$ mm,映射参数增量 $\Delta\beta = 1$ 。拓扑设计结果和应力分布分别以灰度图(白色为空单元,黑色为实单元)和彩色图(蓝色为低应力,红色为高应力)表示。

3.1 实例1

悬臂梁的设计域及边界条件如图1(a)所示,示意图中边长 $a = 200$ mm, $b = 100$ mm,采用四节点

的正方形网格划分优化设计域,其尺寸为 $1\text{ mm}\times 1\text{ mm}$ 。固定悬臂梁左边界水平和垂直方向的自由度,右端边界中间位置施加方向竖直向下的外载荷 F ,为防止载荷施加单元的应力集中,该载荷被均匀分配给相邻的 7 个有限元节点,每个节点载荷大小为 100 N 。体积约束值 $V^* = 40\%$ 。

计算传统的刚度最大化设计(图 1(b)(c)),作为对比验证以应力最小化为目标的强

度设计(图 1(d)(e))。比较两种优化设计方法得到的拓扑构型发现,刚度设计得到的结构存在较多细杆,而强度优化设计结构杆件较少且比较粗。从应力分布图可以看出,应力优化设计结构杆件大部分区域颜色更亮,表明结构应力分布均匀,较刚度设计没有明显的应力集中现象。强度优化设计得到的拓扑结果更符合工程实际应用。

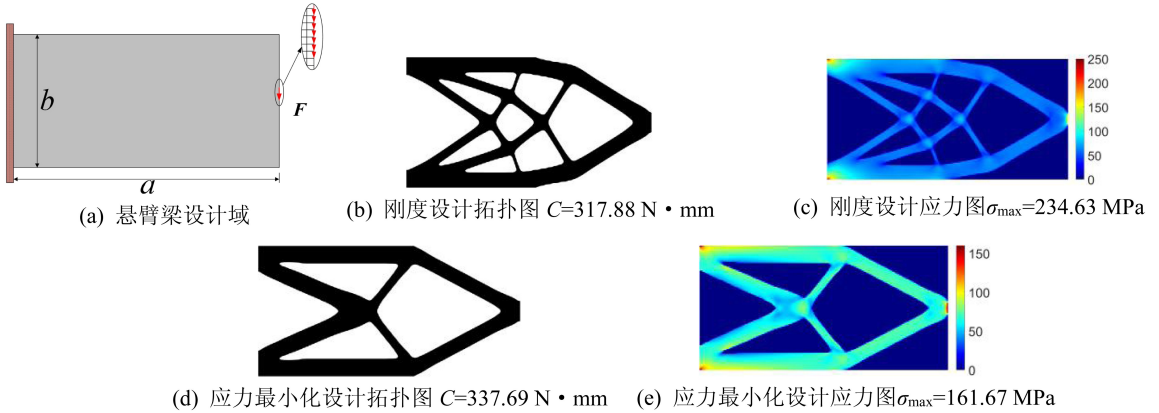


图 1 悬臂梁结构刚度设计和应力最小化设计比较

Fig.1 Comparative analysis of stiffness-oriented design and stress minimization design of cantilever beam structures

对比发现,强度设计的结构柔度比刚度设计增大了 5.87%,强度优化设计结构的最大 Mises 应力比刚度设计降低了 31.10%。与传统的刚度优化设计相比,所提出的强度优化设计方法,在结构柔度增加不大的情况下,最大 Mises 应力水平有明显的减小。图 2 为悬臂梁应力优化收敛曲线,从图中可以看出,凝聚应力和最大应力先快速下降,由于映射参数的逐渐增大而略微上升,最后平稳收敛。

3.2 实例 2

L 型梁是应力拓扑优化设计问题中的典型算例,在 L 型梁的内拐角处由于尖角的存在,会在此出现应力集中现象。L 型梁的设计域及边界条件如图 3(a) 所示,示意图中边长 $a = 120\text{ mm}$,网格尺寸为 $1\text{ mm}\times 1\text{ mm}$,则设计域中网格数为 120×120 个,去除设计域中右上位置尺寸为 $0.6\times a = 72\text{ mm}$ 的正方形区域。固定 L 型梁上边界水平和垂直方向的自由度,右端边界中间位置施加方向竖直向下的外载荷 F ,为防止载荷施加单元的应力集中,该外载荷被均匀分配给相邻的 7 个有限元节点,每个节点载荷大小为 20 N 。体积约束值 $V^* = 40\%$ 。

同样地,将传统刚度优化设计(图 3(b)(c)) 和强度设计(图 3(d)(e)) 的拓扑结构图、应力分布结果图、柔度值以及最大 Mises 应力值依次列出。对比其拓扑结构图发现,两种优化设计方法得到的拓扑构型在内拐角应力集中处有明显变化,如图 3(b)(d) 红圈区域所示。L 型梁在内拐角处强度优化比刚度设计变得更平滑,从而降低了应力集中现象。

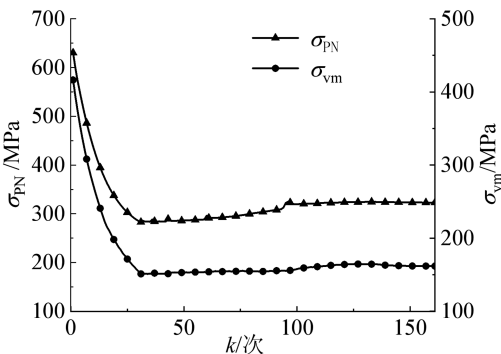


图 2 悬臂梁应力优化收敛曲线

Fig.2 Cantilever beam stress optimization convergence curve

应力优化设计的结构柔度相对刚度设计增大了 4.09%,最大 Mises 应力相对刚度设计降低了 36.49%。经过强度优化设计的 L 型梁结构相对刚度设计,在柔度值增加不大的情况下,最大 Mises 应力水平得到显著降低。

图 4 为 L 型梁的应力优化收敛曲线,从图中

可看出,本文采用的 P 范数全局应力评估策略能较好地捕获最大应力的变化趋势。由于应力分布的非线性,迭代过程初期阶段会出现轻微的振荡现象,随着优化迭代次数的增加,凝聚应力目标函数和最大 Mises 应力优化目标都趋于平稳,并最终达到收敛条件。

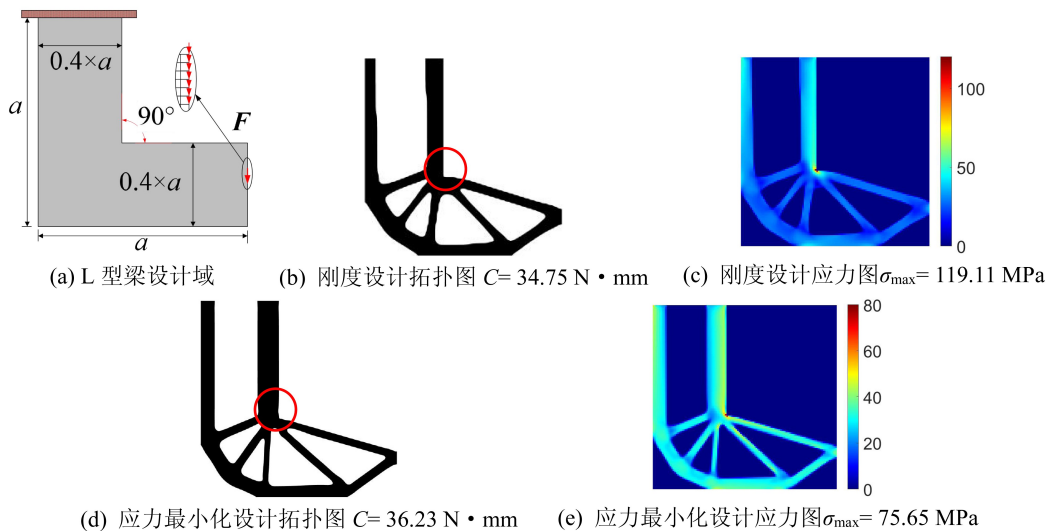


图 3 L 型梁结构刚度设计和应力最小化设计比较

Fig.3 Comparative analysis of stiffness-oriented design and stress minimization design of L-shaped beam structures

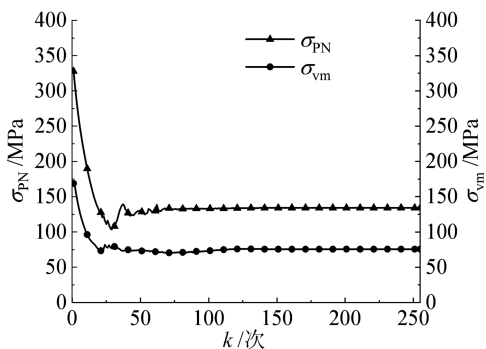


图 4 L 型梁应力优化收敛曲线

Fig.4 L-shaped beam stress optimization convergence curve

3.3 实例 3

三维 MBB 梁算例的几何模型及其边界条件如图 5(a)所示。该算例模型示意图中边长 $a = 60$ mm, $b = 30$ mm, $c = 10$ mm, 结构由边长为 1 mm 的立方体单元网格划分。三维 MBB 梁的两侧下端节点自由度全部固定,在设计域的底部界面的中间施加一个方向竖直向下,分布在 33 个节点上的均布载荷,每个节点载荷大小为 100 N。体积约束

值 $V^* = 10\%$ 。

将三维 MBB 梁的刚度设计(图 5(b)(c))和强度设计(图 5(d)(e))的拓扑结果依次列出。对比两种目标方法的拓扑结构图和应力分布图发现,刚度设计的拓扑结构分成两层,两端边界支撑处的材料分布较少,在 4 个边角处的应力集中较明显;强度设计的拓扑结构为一个整体的粗杆件,更符合实际的工程制造,两端边界支撑处有更多的材料分布,应力水平较低。

对比发现,强度优化设计的结构柔度值相对刚度设计增大了 2.20%,强度优化设计结构的最大 Mises 应力值相对刚度设计降低了 25.32%。表明所提出的强度优化设计方法扩展到三维同样适用。

图 6 为 MBB 梁的应力优化收敛曲线,从图中可以看出,凝聚应力目标函数和最大 Mises 应力优化目标的变化趋势相同,都是先减小后稍微增大,最终趋于平稳。同时表明了所提出的优化方法对于三维问题的收敛稳定性。

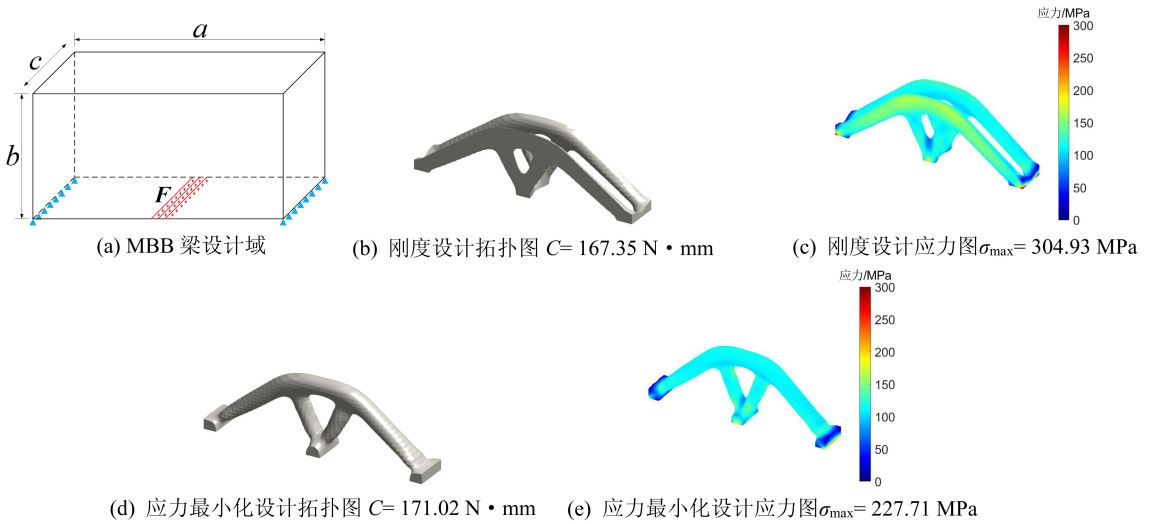


图 5 MBB 梁结构刚度设计和应力最小化设计比较

Fig.5 Comparative analysis of stiffness-oriented design and stress minimization design of MBB beam structures

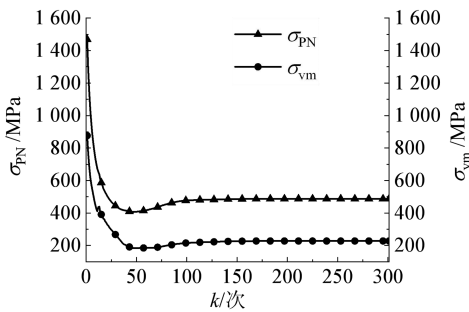


图 6 MBB 梁应力优化收敛曲线

Fig.6 MBB beam stress optimization convergence curve

4 结论

1) 采用 P 范数凝聚函数将局部应力全局化, 采用应力松弛技术避免应力奇异问题, 是实现结构应力最小化的关键。

2) 传统刚度优化设计, 无法避免应力集中, 而应力最小化设计可以有效降低结构的应力集中, 实现结构近似等应力设计。

3) 应力最小化设计有效降低应力峰值的同时, 结构柔度会有略微上升。二维和三维数值算例结果表明, 相较于刚度设计, 柔度仅增加 2.20%~5.87%, 而应力降低了 25.32%~36.49%。

参考文献:

- [1] LE C, NORATO J, BRUNS T, et al. Stress-based topology optimization for continua[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41(4): 605-620.
- [2] 龙凯, 王选, 吉亮. 面向应力约束的独立连续映射方法[J]. 力学学报, 2019, 51(2): 620-629.
- [3] XIA L, ZHANG L, XIA Q, et al. Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 333: 356-370.
- [4] HAN Z T, WEI K, GU Z Q, et al. Stress-constrained multi-material topology optimization via an improved alternating active-phase algorithm[J]. Engineering Optimization, 2022, 54(2): 305-328.
- [5] JIANG Y T, ZHAO M. Stress-based topology optimization with the parameterized level-set method based on radial basis functions[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022, 65(8): 224.
- [6] 王超, 徐斌, 段尊义, 等. 面向增材制造的应力最小化连通性拓扑优化[J]. 力学学报, 2021, 53(4): 1070-1080.
- [7] HUANG X D. Smooth topological design of structures using the floating projection[J]. Engineering Structures, 2020, 208: 110330.
- [8] DENG H, VULMIRI P S, TO A C. An efficient 146-line 3D sensitivity analysis code of stress-based topology optimization written in MATLAB[J]. Optimization and Engineering, 2022, 23(3): 1733-1757.