

# 分数阶 Maxwell 纳米流体二阶滑移流动与热传递分析

许晓勤<sup>1</sup>, 陈淑梅<sup>2</sup>

(1. 福建船政交通职业学院 汽车学院, 福建 福州 350007;

2. 福州大学 机械工程及自动化学院, 福建 福州 350116)

**摘要:** 在考虑二阶滑移边界的影响下, 对多孔介质中垂直拉伸板引起的分数阶 Maxwell 纳米流体流动与热传递特性开展分析研究。利用分数阶剪切应力和分数阶 Cattaneo 热通量模型构建二维边界层控制方程, 采用有限差分法和 L1 算法进行数值求解。对不同物理参数下的速度、温度、平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数的变化趋势进行图形化分析。研究表明, 牛顿流体的流动性能和热传递优于粘弹性流体; 速度分数阶导数参数和温度松弛时间会恶化对流和热传递, 而温度分数阶导数参数和速度松弛时间则促进对流和热传递; 滑移参数降低了流体初始速度, 一阶滑移参数对流动和热传递的影响大于二阶滑移参数; 流动和热传递对各物理参数的敏感度随该物理参数的增大而下降。

**关键词:** 二阶滑移边界; 分数阶 Maxwell 纳米流体; 流动与热传递; 多孔介质; 垂直拉伸板

中图分类号: O351.2

文献标志码: A

文章编号: 1672-4348(2023)04-0353-10

## Boundary slip flow and heat transfer analysis of a fractional Maxwell nanofluid

XU Xiaoqin<sup>1</sup>, CHEN Shumei<sup>2</sup>

(1. School of Automobiles, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, China;

2. School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China)

**Abstract:** The flow and heat transfer characteristics of a fractional Maxwell nanofluid induced by a vertical stretching plate embedded in a porous medium was analyzed, taking second-order slip boundary conditions into account. The fractional shear stress and fractional Cattaneo heat flux model were used to construct the two-dimensional boundary layer governing equations. Then the finite difference and L1 algorithm were adopted for numerical solution. Analysis of the variation trends of velocity, temperature, average skin friction coefficient, and average Nusselt number under different physical parameters was carried out graphically. Results show that the flow performance and heat transfer of Newtonian fluid are better than those of viscoelastic fluid; the velocity fractional derivative parameter and temperature relaxation time worsen convection and heat transfer, while the temperature fractional derivative parameter and velocity relaxation time promote convection and heat transfer; the slip parameters reduce the initial velocity of the fluid, and the first-order slip parameter has a greater impact on flow and heat transfer than the second-order slip parameter; the sensitivity of flow and heat transfer to each physical parameter reduces as the physical parameter increases.

**Keywords:** second-order slip boundaries; fractional Maxwell nanofluid; flow and heat transfer; porous medium; vertical stretching sheet

收稿日期: 2023-04-21

基金项目: 福建省科技厅自然科学基金面上项目(2021J01337); 福建船政交通职业学院博士启动基金资助项目(X21206001)

第一作者简介: 许晓勤(1981—), 女, 福建厦门人, 副教授, 博士, 研究方向: 流体力学及电磁流变工程应用。

热系统的传热性能不仅影响产品的生产率,还影响生产成本。研究者们探寻各种创新方法提高热系统的传热性能,如采用多孔介质提高热系统的冷却效率,提出“纳米流体”新型导热介质等。多孔介质是包含许多孔隙的固体基质,如陶瓷(如碳化硅、氧化铝和硅酸盐)、金属泡沫、多孔吸附材料(如活性炭、碳纳米管)和多孔塑料(如聚氨酯、聚丙烯、聚酰胺)等,由于其传热面积大、传热性能好被广泛用于各种传热系统中,已是公认的提高热系统冷却效率的方法之一<sup>[1]</sup>。“纳米流体”的概念由 Choi 和 Eastman<sup>[2]</sup>首次提出,其导热系数比水、油、乙二醇溶液等传统工作介质高,可满足高温系统的冷却要求。“纳米流体”是通过在基础传热流体中添加金属纳米颗粒进行制备,采用的基液通常是粘弹性流体<sup>[3]</sup>。

大多数粘弹性流体流动会产生壁面滑移,特别是非线性滑移。粘弹性纳米流体的研究过程通常采用整数阶模型,或者忽略了滑移边界,从而导致研究数据与实际不吻合。与整数阶动态系统相比,分数阶微分方程可以方便地对复杂系统进行建模,并能准确地定义某些参数的物理意义<sup>[4]</sup>。其中时间分数阶导数算子可以反映传输过程的记忆特性,而空间分数阶导数算子可以描述流动过程中的非局部特性。为了更准确描述粘弹性流体的流动及其传热特性,本课题引入 Caputo 时间分数阶导数,同时考虑二阶滑移边界条件,探索分数阶 Maxwell 纳米流体在多孔介质垂直拉伸板上的流动与热传递。

## 1 数学模型

考虑多孔介质中二维垂直拉伸板上的非定常分数阶 Maxwell 纳米流体流动与传热,其物理模型如图 1 所示。

在笛卡尔坐标系中,令  $x$  轴平行于拉伸板,而  $y$  轴垂直于拉伸板。沿  $x$  轴和  $y$  轴的速度分量分别为  $u$  和  $v$ 。垂直板以  $u_w = ax$  的速度拉伸,其中  $a$  为正常数。拉伸板温度为  $T_w$ ,无穷远处温度为  $T_\infty$ ,纳米流体在拉伸板表面流动时存在壁面滑移现象,且满足对流换热边界条件。在上述假设下,边界层控制方程如下:

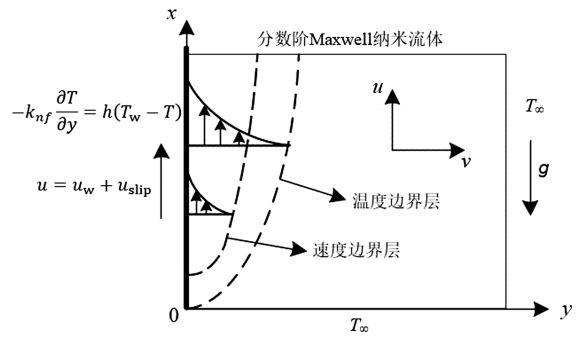


图 1 模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of the model

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + (\rho\beta)_{nf} g (T - T_\infty) + R \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{(\rho C_p)_{nf}} \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3)$$

式中,  $S_{xy}$  为剪切应力,  $R$  为多孔介质中固体基质产生的 Darcy 阻力,  $\mathbf{q}$  为热通量。

初始条件和边界条件:

$$\begin{cases} t=0; u=v=0, T=T_\infty, x \geq 0; \\ t>0; u=0, T=T_\infty, x=0; \\ t>0, y=0; u=u_w+u_{slip}, v=0, -k_{nf} \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_w - T); \\ t>0, y \rightarrow \infty; u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $k_{nf}$  为纳米流体热导率,  $h$  为对流换热系数, 二阶滑移速度<sup>[5]</sup>为:

$$u = u_w + u_{slip} = ax + \frac{2}{3} \left[ \frac{3-\varphi l^3}{\varphi} - \frac{3(1-l^2)}{2K_n} \right] \lambda \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{1}{4} \left[ l^4 + \frac{2}{K_n^2} (1-l^2) \right] \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ax + a_1 \frac{\partial u}{\partial y} - a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

式中,  $K_n$  为 Knudsen 数,  $l = \min \{ 1/K_n, 1 \}$ ,  $\varphi (0 \leq \varphi \leq 1)$  是动量适应系数,  $\lambda$  是分子平均自由程,  $0 \leq l \leq 1, a_1 > 0, a_2 > 0$ 。

分数阶 Maxwell 纳米流体剪切应力  $S_{xy}$  本构方程为<sup>[6]</sup>:

$$(1 + \lambda_1^\alpha D_t^\alpha) S_{xy} = \mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

式中,  $\lambda_1$  为速度松弛时间,  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  为速度分数阶导数参数。注意, 当  $\alpha = 0$  时, 公式(5)退化为牛顿纳米流体, 而当  $\alpha = 1$  时, 公式(5)退化

为广义 Maxwell 纳米流体。 $D_t^\alpha$  是 Caputo 时间分数阶导数算子,  $\alpha$  阶分数阶导数定义为<sup>[7]</sup>:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\eta)^{-\alpha} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} d\eta \quad (6)$$

式中,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数, Darcy 阻力  $R$  满足改进的分数阶 Darcy 定律<sup>[8]</sup>:

$$(1+\lambda_1^\alpha D_t^\alpha)R = -\mu_{nf} \frac{\varepsilon u}{K} \quad (7)$$

式中,  $\varepsilon$ 、 $K$  分别表示多孔介质的孔隙率和渗透率。

将公式(5)(6)和(7)代入公式(2)得:

$$(1+\lambda_1^\alpha D_t^\alpha) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\mu_{nf} \partial^2 u}{\rho_{nf} \partial y^2} + (1+\lambda_1^\alpha D_t^\alpha) \frac{(\rho\beta)_{nf} g(T-T_\infty)}{\rho_{nf}} - \frac{\mu_{nf} \varepsilon u}{\rho_{nf} K} \quad (8)$$

动力粘度  $\mu$ , 密度  $\rho$  和热膨胀系数  $\beta$  表达式如式(9)。

$$\begin{cases} \mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\phi)^{2.5}}, \rho_{nf} = (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_p \\ (\rho\beta)_{nf} = (1-\phi)(\rho\beta)_f + \phi(\rho\beta)_p \end{cases} \quad (9)$$

式中, 下标  $nf$ ,  $f$ ,  $p$  分别表示纳米流体、基液和纳米颗粒,  $\phi$  是纳米颗粒体积分数。

分数阶 Cattaneo 热通量模型为<sup>[9]</sup>:

$$\mathbf{q} + \frac{\lambda_2^\gamma}{\gamma!} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t^\gamma} = -k_{nf} \nabla T \quad (10)$$

式中,  $\lambda_2$  为温度松弛时间,  $\gamma$  为温度分数阶导数参数,  $\gamma! = \Gamma(1+\gamma)$ 。将公式(10)代入公式(3), 得能量方程为:

$$\left( 1 + \frac{\lambda_2^\gamma}{\gamma!} D_t^\gamma \right) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (11)$$

热导率  $k$  和热容  $(\rho C_p)$  表达式为:

$$\begin{cases} k_{nf} = \frac{(k_p + 2k_f) - 2\phi(k_f - k_p)}{(k_p + 2k_f) + \phi(k_f - k_p)} \\ (\rho C_p)_{nf} = (1-\phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_p \end{cases} \quad (12)$$

本课题选择的纳米流体可由 Cu 纳米颗粒均匀分散在粘弹性表面活性剂溶液、十六烷基三甲基氯化铵 (CTAC) 和水杨酸钠 (NaSal) 水溶液中制备而成。CTAC/NaSal 水溶液和纳米颗粒 Cu 的热物理特性如表 1 所示。

表 1 CTAC/NaSal-water 和 Cu 的热物理特性<sup>[10]</sup>

Tab.1 Thermophysical properties of CTAC/NaSal-water

材料	$C_p/\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$k/\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\beta/10^{-5} \text{K}^{-1}$
CTAC/NaSal-water	4179	997.1	0.613	21
Cu	385	8933	400	1.67

引入如下无量纲变量<sup>[11]</sup>:

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L} Gr^{\frac{1}{4}}, t^* = \frac{t}{L^2} Gr^{\frac{1}{2}}, u^* = \frac{uL}{v_f} Gr^{-\frac{1}{2}},$$

$$v^* = \frac{vL}{v_f} Gr^{-\frac{1}{4}}, \theta = \frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}, \lambda_1^* = \frac{\lambda_1 v_f}{L^2} Gr^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_2^* = \frac{\lambda_2 v_f}{L^2} Gr^{\frac{1}{2}}, \nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f}, Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f},$$

$$\alpha_f = \frac{k_f}{(\rho C_p)_f}, Da = \frac{K}{L^2}, Gr = \frac{g\beta(T_w-T_\infty)L^3}{v_f^2},$$

$$E_1 = \frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left( 1 - \phi + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right)},$$

$$E_2 = \frac{1 - \phi + \phi \frac{(\rho\beta)_p}{(\rho\beta)_f}}{1 - \phi + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}},$$

$$H(\phi) =$$

$$\left[ 1 - \phi + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \frac{k_p + 2k_f + \phi(k_f - k_p)}{k_p + 2k_f - 2\phi(k_f - k_p)}$$

将上述无量纲变量代入边界层控制方程(1)(8)(11), 并省略无量纲标志 \* 得:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$(1+\lambda_1^\alpha D_t^\alpha) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\lambda_1^\alpha D_t^\alpha) E_2 \theta - E_1 \frac{\varepsilon}{Da} Gr^{-\frac{1}{2}} u \quad (14)$$

$$\left( 1 + \frac{\lambda_2^\gamma}{\gamma!} D_t^\gamma \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{H(\phi) Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (15)$$

式中,  $\nu_f$ 、 $\alpha_f$  分别为基液的运动粘度和热扩散率,  $Pr$  为 Prandtl 数,  $Gr$  为 Grashof 数,  $Da$  为 Darcy 数。

相应的初始条件和边界条件为:

$$\begin{cases} t=0: u=v=0, \theta=0, x \geq 0; \\ t>0: u=0, \theta=0, x=0; \\ t>0, y=0: u=c_0x+c_1 \frac{\partial u}{\partial y}-c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, v=0, \frac{\partial \theta}{\partial y}=-\tau(1-\theta); \\ t>0, y \rightarrow \infty: u \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (16)$$

式中,  $\tau = hL / (k_{nf} Gr^{1/4})$  是对流换热参数,  $c_0 = aL$ ,  $c_1 = a_1 v_f Gr^{3/4} / L^2$ ,  $c_2 = a_2 v_f Gr / L^3$ 。

表面摩擦系数和 Nusselt 数是流体流动与传热研究中两个关键的物理量。分数阶 Maxwell 模型的平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数分别满足式(17)(18)。

$$\overline{C_f} + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \overline{C_f} = \frac{Gr^{\frac{3}{4}}}{(1-\phi)^{2.5} Re^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (17)$$

$$\overline{Nu} + \frac{\lambda_2^\gamma}{\gamma!} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \overline{Nu} = -\frac{k_{nf}}{k_f} Gr^{\frac{1}{4}} \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (18)$$

## 2 数值求解

由于分数阶 Maxwell 模型中,非线性动量方程(14)含有分数阶混合对流项,求解困难,本课题采用有限差分法,结合 L1 算法求解非线性边界层控制方程(13)~(15),其边界条件如公式(16)所示。

### 2.1 离散格式

定义空间步长  $\Delta x = L/M$ ,  $\Delta y = Y_{max}/N$ , 时间步长  $\Delta t$ 。其中  $x_i = i\Delta x, i = 0, 1, \dots, M; y_j = j\Delta y, j = 0, 1, \dots, N; t_k = k\Delta t, k = 0, 1, \dots, R$ 。  $u_{i,j}^k$  是  $u$  在点  $(x_i, y_j, t_k)$  处的数值解。依据 Caputo 时间分数阶导数定义,采用 L1 算法对时间分数阶导数进行离散如下<sup>[12]</sup>:

$$\frac{\partial^\alpha f(t_k)}{\partial t^\alpha} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [f(t_k) - \alpha_{k-1}f(t_0) - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s)f(t_{k-s})] + O(\Delta t^{2-\alpha}) \quad (19)$$

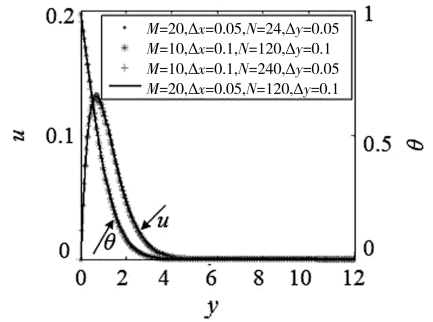
式中,  $\alpha_s = (s+1)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}, s = 0, 1, \dots, R$ 。

公式(13)~(18)的离散格式详见附件。

### 2.2 求解过程

计算区域是一个宽为  $x_{max} = 1$ , 长为  $y_{max} = 12$  的矩形,  $y_{max}$  对应于  $y \rightarrow \infty$ 。当  $t = 0$  时,从边界方程(31)可得  $u, v$  和  $\theta$  的初始值。在任意时间步长

内,先前时间层的变量都当成常数。在  $i$  层的每个内部节点,迭代方程构成一个三对角线性方程,可以通过追赶法求解。当  $u, v$  和  $\theta$  在所有网格节点上两个连续时间步长之间的差的绝对值小于  $10^{-5}$  时,时间层的迭代停止并达到稳定状态。经过多次测试,最终确定空间和时间步长为  $\Delta x = 0.05, \Delta y = 0.1$  和  $\Delta t = 0.1$ 。如图 2 所示,所选网格尺寸的数值解是稳定且收敛的。



( $Pr = 6.85, \alpha = \gamma = \lambda_1 = 0.1, \varepsilon = 0.01, \lambda_2 = 0.2, c_0 = c_1 = c_2 = 0, Da = 0.001, \tau = 50, Gr = 10, Re = 4, \phi = 0.06$ )

图 2 网格独立性验证

Fig.2 Grid size independence verification

为了验证数值结果的准确性,将  $x_{max} = 1, y = 0$  处  $-\partial\theta/\partial y$  的值与之前参考文献中的相似解  $-\theta'(0)$  进行比较,结果吻合,如表 2。注意  $\partial\theta/\partial y = \partial\theta/\partial\eta \cdot \partial\eta/\partial y = \theta'(0)/\sqrt{2}$ , 因此本研究的结果都乘以  $\sqrt{2}$ 。

表 2 当  $\lambda_1 = \lambda_2 = \phi = c_0 = c_1 = c_2 = 0$  时,  $x = 1, y = 0$  处  $-\partial\theta/\partial y$  的值与相似解  $-\theta'(0)$  比较

Tab.2 Comparison of  $-\partial\theta/\partial y$  when  $x = 1, y = 0$  with  $-\theta'(0)$  for  $\lambda_1 = \lambda_2 = \phi = c_0 = c_1 = c_2 = 0$

Pr	$-\theta'(0)$		$-\sqrt{2} \partial\theta/\partial y$
	Crepeau and Clarksean <sup>[13]</sup>	Chamkha and Khaled <sup>[14]</sup>	Present work
1	0.567 1	0.564 6	0.568 2
10	1.169 0	1.172 0	1.173 1
100	2.191 0	2.194 3	2.195 2

## 3 结果与讨论

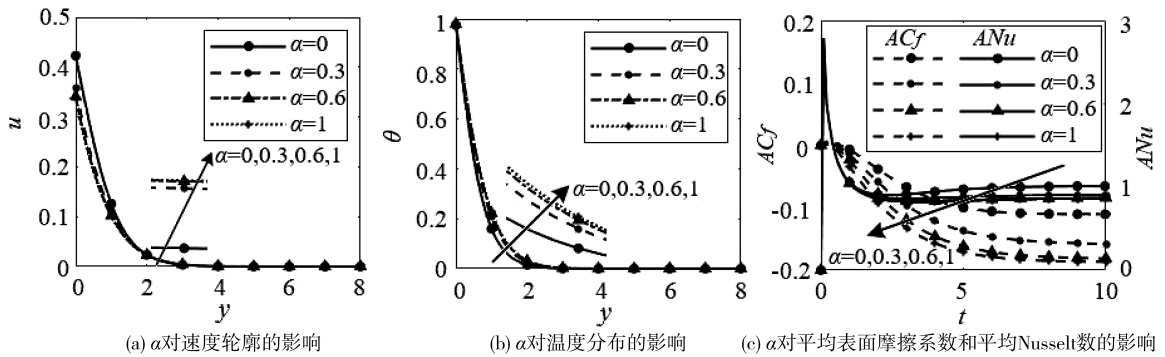
根据数值求解结果讨论不同物理参数对流动和热传递的影响,包括分数阶导数参数、松弛时间、滑移参数、多孔介质参数和纳米颗粒体积分数。

### 3.1 分数阶导数参数对流动和热传递的影响

图3和图4分别体现了速度分数阶导数参数( $\alpha$ )和温度分数阶导数参数( $\gamma$ )对流动(以速度和平均表面摩擦系数为表征)和热传递(以温度和平均 Nusselt 数为表征)的影响。由图3(a)可知,初始速度随 $\alpha$ 的增大而减小,但在远离壁面处速度轮廓曲线出现交叉,体现了粘弹性材料对外力响应的滞后性,动量边界层厚度随 $\alpha$ 的增大而略微增大。平均表面摩擦系数绝对值随 $\alpha$ 增大而增大,见图3(c)。当 $\alpha=0$ 时,Maxwell 流体退化为牛顿流体,牛顿流体具有最大的初始速度、最薄的动量边界层厚度及最小的平均表面摩擦系数,因此牛顿流体的流动性能最好。由图3(b)可知,温度及边界层厚度随 $\alpha$ 的增大而增大,而平均 Nusselt 数随 $\alpha$ 的增大而减小,牛顿流体的传热

效率最好。这可能是因为粘弹性增加了额外的能量损耗,导致传热效率下降。此外,相邻两条曲线的差值随 $\alpha$ 的增大而缩小,说明流动和热传递对 $\alpha$ 的敏感性随 $\alpha$ 增大而下降。

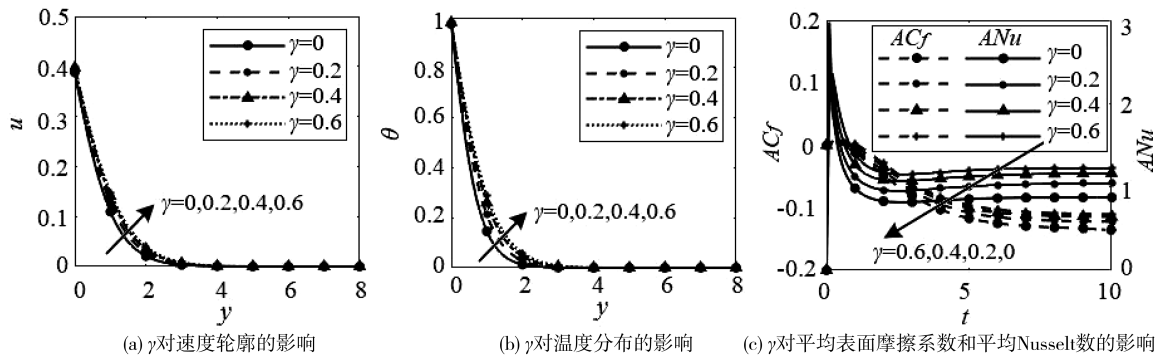
由图4(a)(b)可知,速度和温度都是 $\gamma$ 的增函数, $\gamma$ 对温度的影响大于 $\alpha$ (见图3(b)),这是因为 $\gamma$ 与热传导直接相关,而 $\alpha$ 与剪切应力直接相关。由图4(c)可知,平均表面摩擦系数绝对值随 $\gamma$ 增大而减小,而平均 Nusselt 数随 $\gamma$ 增大而增大,说明 $\gamma$ 会促进对流和传热。注意,平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数不再取决于图4(a)(b)的速度梯度和温度梯度,而分别为速度梯度和温度梯度的复杂函数,见公式(17)(18)。此外,流动和热传递对 $\gamma$ 的敏感性随 $\gamma$ 增大而下降。



( $Pr=6.85, \gamma=\lambda_1=0.1, \varepsilon=0.01, \lambda_2=0.2, c_0=0.5, c_1=0.2, c_2=0.3, Da=0.001, \tau=50, Gr=10, Re=4, \phi=0.06$ )

图3  $\alpha$ 对流动和热传递的影响

Fig.3 Effects of  $\alpha$  on flow and heat transfer



( $Pr=6.85, \alpha=\lambda_1=0.1, \varepsilon=0.01, \lambda_2=0.2, c_0=0.5, c_1=0.2, c_2=0.3, Da=0.001, \tau=50, Gr=10, Re=4, \phi=0.06$ )

图4  $\gamma$ 对流动和热传递的影响

Fig.4 Effects of  $\gamma$  on flow and heat transfer

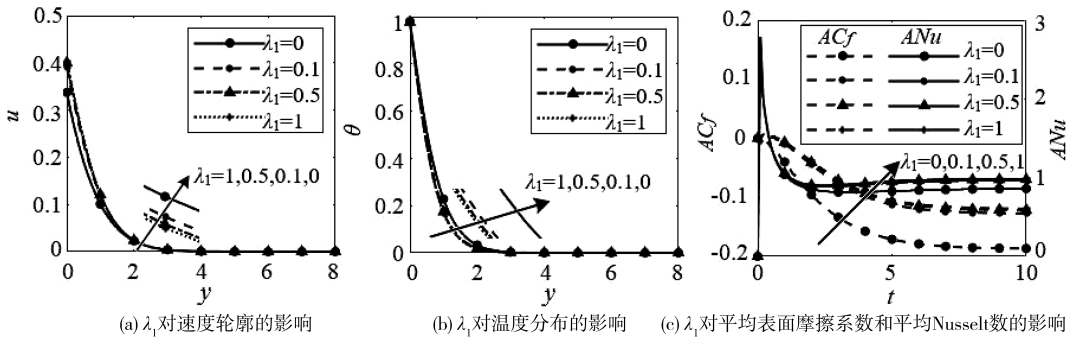
### 3.2 松弛时间对流动和热传递的影响

图5和图6分别揭示了速度松弛时间( $\lambda_1$ )和温度松弛时间( $\lambda_2$ )对流动和热传递的影响。

对比图3和图5可知, $\lambda_1$ 对流动和热传递的影响趋势正好与 $\alpha$ 相反,但影响程度较小,说明松弛时间变量 $\lambda_1$ 促进流体流动,增强热传递,但改变

$\lambda_1$  数值对结果影响不明显。另外,  $\lambda_1$  越大, 流动和热传递的变化量越小, 说明流动和热传递对  $\lambda_1$  变化的灵敏度下降。

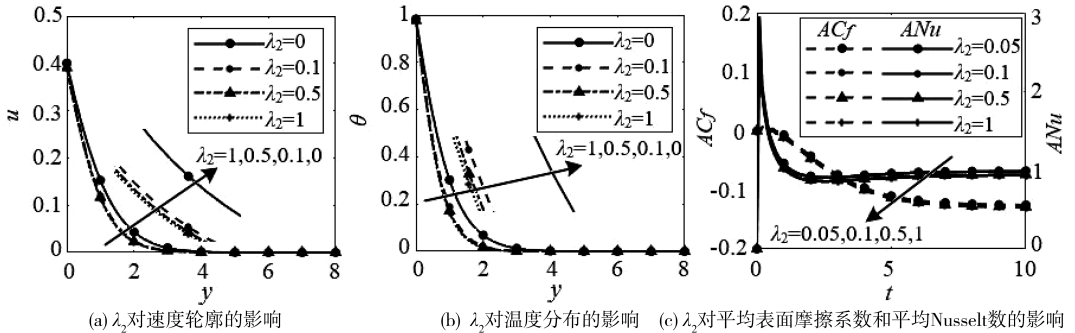
对比图 4 和图 6 可知,  $\lambda_2$  对流动和热传递的影响趋势正好与  $\gamma$  相反, 但影响程度较小, 说明松弛时间变量  $\lambda_2$  小幅抑制对流和热传递。



( $Pr=6.85, \alpha=\gamma=0.1, \varepsilon=0.01, \lambda_2=0.2, c_0=0.5, c_1=0.2, c_2=0.3, Da=0.001, \tau=50, Gr=10, Re=4, \phi=0.06$ )

图 5  $\lambda_1$  对流动和热传递的影响

Fig.5 Effects of  $\lambda_1$  on flow and heat transfer



( $Pr=6.85, \alpha=\gamma=\lambda_1=0.1, \varepsilon=0.01, c_0=0.5, c_1=0.2, c_2=0.3, Da=0.001, \tau=50, Gr=10, Re=4, \phi=0.06$ )

图 6  $\lambda_2$  对流动和热传递的影响

Fig.6 Effects of  $\lambda_2$  on flow and heat transfer

### 3.3 滑移参数对流动和热传递的影响

图 7 和图 8 分别揭示了一阶滑移参数( $c_1$ ) 和二阶滑移参数( $c_2$ ) 对流动和热传递的影响。由图 7(a) 和图 8(a) 可知, 一二阶滑移参数越大, 速度初始值越小, 这是因为流体在壁面处出现了滑移, 使流体速度小于壁面速度。在远离壁面处, 速度轮廓曲线出现交叉, 动量边界层厚度随滑移参数增大而增大,  $c_1$  对速度的影响大于  $c_2$ 。由图 7(c) 和图 8(c) 可知,  $c_1$  和  $c_2$  在开始阶段对平均表面摩擦系数的影响趋势相同, 但在  $t$  约为 6 时, 对于不同的  $c_2$ , 平均表面摩擦系数曲线出现交叉。说明一阶滑移参数会促进对流, 二阶滑移参数刚开始促进对流, 但在后期会抑制对流。

由图 7(b) 和图 8(b) 可知, 温度随滑移参数的增大而增大, 温度受一阶滑移参数的影响更大。在开始阶段, 平均 Nusselt 数随滑移参数的增大而

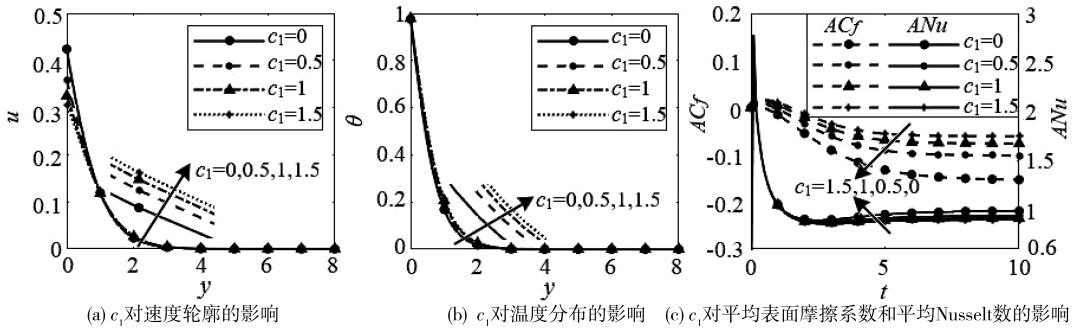
减小, 但在  $t$  约为 6 时, 对于不同的  $c_2$ , 平均 Nusselt 数曲线也出现交叉。说明一阶滑移参数会恶化热传递, 二阶滑移参数刚开始抑制热传递, 但在后期阶段会改善热传递。同样, 滑移参数较大时, 对流动和热传递的影响程度下降。

### 3.4 多孔介质对流动和热传递的影响

图 9 和图 10 分别给出多孔介质物理参数孔隙率( $\varepsilon$ ) 和 Darcy 数 ( $Da$ ) 对流动和热传递的影响。对比图 9 和图 10 可知, 孔隙率和 Darcy 数对流动及热传递的影响趋势正好相反, 这是因为孔隙率越大, 通道横截面增大, 流动阻力越大, 不利于流体流动和热传递; 而 Darcy 数正比于渗透率,  $Da$  越大, 渗透能力越强, 减少固体基质引起的 Darcy 阻力, 有利于流体流动和热传递。注意, 对于不同的  $\varepsilon$  和  $Da$ , 平均表面摩擦系数曲线在后期阶段出现交叉, 说明  $\varepsilon$  在开始阶段抑制对流, 而后

期反而会促进对流,而  $Da$  的影响正好相反。此外, $\varepsilon$  和  $Da$  数越大,流动和热传递的变化越不明

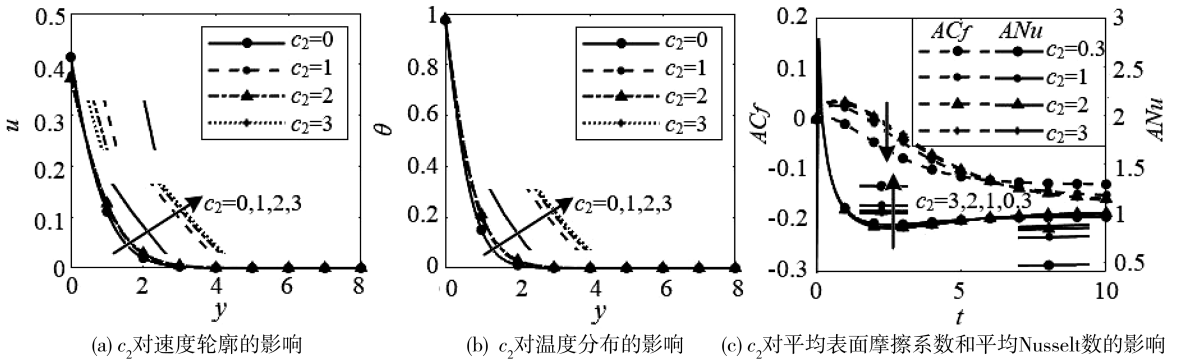
显,说明流动和热传递的敏感性下降。



( $Pr=6.85, \alpha=\gamma=\lambda_1=0.1, \varepsilon=0.01, \lambda_2=0.2, c_0=0.5, c_2=0.3, Da=0.001, \tau=50, Gr=10, Re=4, \phi=0.06$ )

图 7  $c_1$  对流动和热传递的影响

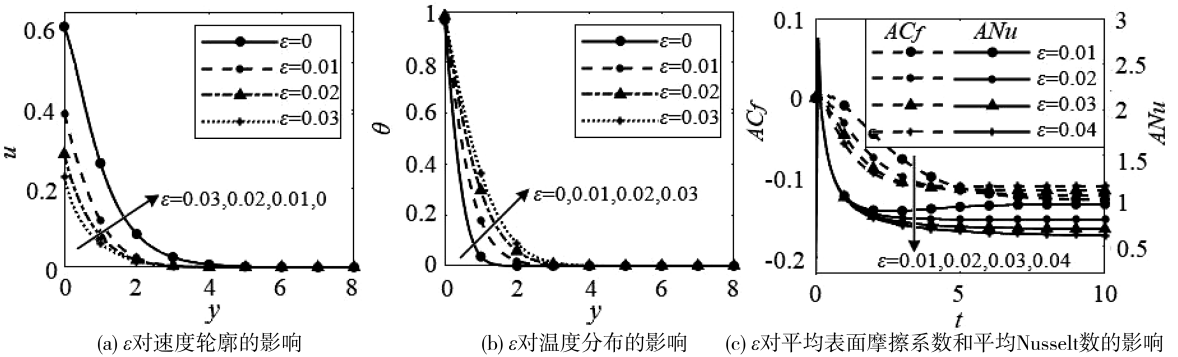
Fig.7 Effects of  $c_1$  on flow and heat transfer



( $Pr=6.85, \alpha=\gamma=\lambda_1=0.1, \varepsilon=0.01, \lambda_2=0.2, c_0=0.5, c_1=0.2, Da=0.001, \tau=50, Gr=10, Re=4, \phi=0.06$ )

图 8  $c_2$  对流动和热传递的影响

Fig.8 Effects of  $c_2$  on flow and heat transfer



( $Pr=6.85, \alpha=\gamma=\lambda_1=0.1, \lambda_2=0.2, c_0=0.5, c_1=0.2, c_2=0.3, Da=0.001, \tau=50, Gr=10, Re=4, \phi=0.06$ )

图 9  $\varepsilon$  对流动和热传递的影响

Fig.9 Effects of  $\varepsilon$  on flow and heat transfer

### 3.5 纳米颗粒体积分数对流动和热传递的影响

图 11 体现了纳米颗粒体积分数 ( $\phi$ ) 对流动和热传递的影响。由图 11(a) 可知,对于不同的  $\phi$ ,速度轮廓曲线出现交叉,速度初始值随  $\phi$  增大

而下降,而动量边界层厚度随  $\phi$  增大而增大。纯流体 ( $\phi=0$ ) 的初始速度最大。这是因为纳米颗粒的加入会增大流体粘性,进而降低初始速度。由图 11(c) 可知,平均表面摩擦系数绝对值刚开

始随  $\phi$  增大而增大,但在  $t > 2$  时,平均表面摩擦系数绝对值随  $\phi$  增大而减小,有使流动性能变好的

趋势。平均 Nusselt 数随  $\phi$  增大而减小,说明纳米颗粒体积分太大反而会降低热传递。

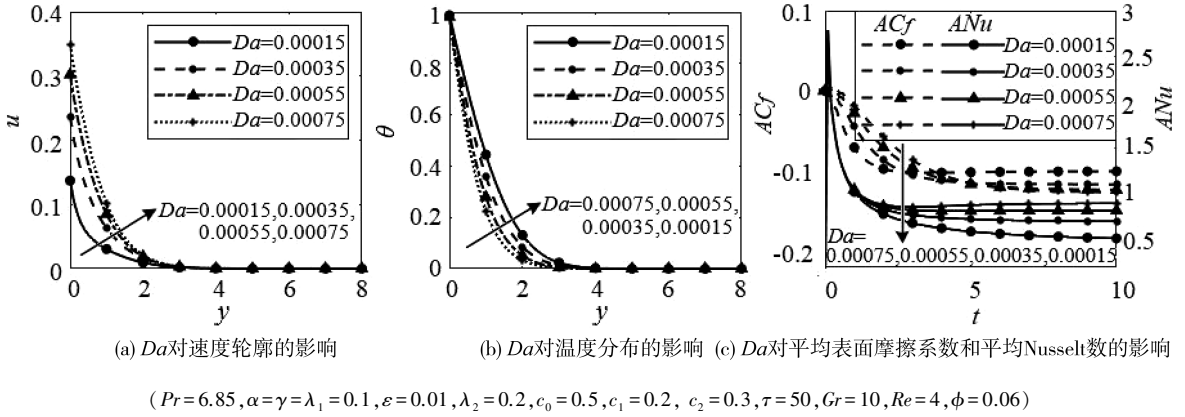


图 10  $Da$  对流动和热传递的影响

Fig.10 Effects of  $Da$  on flow and heat transfer

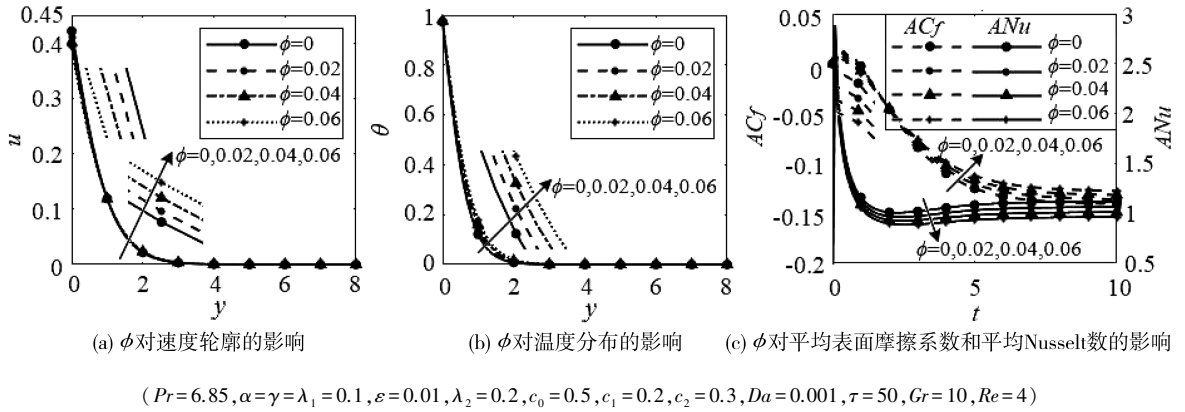


图 11  $\phi$  对流动和热传递的影响

Fig.11 Effects of  $\phi$  on flow and heat transfer

### 4 结论

本课题研究了分数阶 Maxwell 纳米流体在垂直拉伸板上的流动与热传递特性,其中垂直拉伸板嵌入多孔介质中,同时考虑二阶滑移边界的影响。采用有限差分法和 L1 算法求解边界层控制方程,图示并详细分析了不同物理参数对流动和热传递特性的影响。主要结论如下:

1) 牛顿流体的流动性能和热传递优于粘弹性流体。

2) 速度分数阶导数参数会恶化对流和热传递,而温度分数阶导数参数则促进对流和热传递。

3) 速度松弛时间促进对流和热传递,而温度松弛时间则小幅抑制对流和热传递。

4) 滑移参数降低了流体初始速度,一阶滑移参数对流动和热传递的影响大于二阶滑移参数。

5) 孔隙率和 Darcy 数对流动和热传递的影响趋势相反。

6) 流动和热传递对各物理参数的敏感度随该物理参数的增大而下降。

### 参考文献:

[1] 杨伟,胡冬梅,付超,等. 裂缝角度对含气多孔介质热流耦合特性影响研究[J]. 应用力学学报,2021,38(1):313-317.

[2] CHOI S U S, EASTMAN J A. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles[J]. Materials Science,1995,231:99-105.

[3] GOYAL M, BHARGAVA R. Numerical solution of MHD viscoelastic nanofluid flow over a stretching sheet with partial slip

and heat source/sink[J]. ISRN Nanotechnology, 2013, 2013:1-11.

- [4] ZHANG M C, SHEN M, LIU F W, et al. A new time and spatial fractional heat conduction model for Maxwell nanofluid in porous medium[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 78(5):1621-1636
- [5] WU L. A slip model for rarefied gas flows at arbitrary Knudsen number [J]. Applied Physics Letters, 2008, 93(25):253103.
- [6] FRIEDRICH C. Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives[J]. Rheologica Acta, 1991, 30(2):151-158.
- [7] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1999:78-81.
- [8] KHAN M, HAYAT T, ASGHAR S. Exact solution for MHD flow of a generalized Oldroyd-B fluid with modified Darcy's law [J]. International Journal of Engineering Science, 2006, 44(5/6):333-339.
- [9] EZZAT M A. Thermoelectric MHD non-Newtonian fluid with fractional derivative heat transfer[J]. Physica B: Condensed Matter, 2010, 405(19):4188-4194.
- [10] SHEN M, CHEN S R, LIU F W. Unsteady MHD flow and heat transfer of fractional Maxwell viscoelastic nanofluid with Cattaneo heat flux and different particle shapes[J]. Chinese Journal of Physics, 2018, 56(3):1199-1211.
- [11] 陈淑瑞. 基于分数阶微积分理论的几类粘弹性流体模型的研究[D]. 福州:福州大学, 2018.
- [12] LIU F, ZHUANG P, ANH V, et al. Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191(1):12-20.
- [13] CREPEAU J C, CLARKSEAN R. Similarity solutions of natural convection with internal heat generation[J]. Journal of Heat Transfer, 1997, 119(1):183-185.
- [14] CHAMKHA A J, KHALED A R A. Similarity solutions for hydromagnetic simultaneous heat and mass transfer by natural convection from an inclined plate with internal heat generation or absorption[J]. Heat and Mass Transfer, 2001, 37(2):117-123.

(责任编辑:方素华)

## 附录

整数阶导数的离散格式可采用向后差分 and 中心差分公式:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (20)$$

$$u \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=t_k} = u_{i,j}^{k-1} \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (21)$$

$$v \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{t=t_k} = v_{i,j}^{k-1} \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{t=t_k} = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^{k-1} - 2u_{i,j}^{k-1} + u_{i,j-1}^{k-1}}{2 \Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (23)$$

将公式(20)-(22)代入公式(19), 得分数阶导数的迭代格式为:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Delta t \Gamma(2-\alpha)} \left[ u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j}^{k-s-1}) \right] + O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta t) \quad (24)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Delta x \Gamma(2-\alpha)} \left[ u_{i,j}^{k-1} (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) u_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i-1,j}^{k-s}) \right] + O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x) \quad (25)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Delta y \Gamma(2-\alpha)} \left[ v_{i,j}^{k-1} (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) v_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j-1}^{k-s}) \right] + O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta y) \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_1 &= \frac{\lambda_1^\alpha \Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, r_2 = \frac{\Delta t}{2\Delta y^2}, r_3 = \frac{\Delta t}{2Gr^{\frac{1}{2}}}, r_4 = \frac{\lambda_2^\gamma \Delta t^{-\gamma}}{\gamma! \Gamma(2-\gamma)}, r_5 = \frac{\Delta t}{2Pr\Delta y^2}, \\ A_1 &= \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j}^{k-s-1}); \\ A_2 &= \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) u_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i-1,j}^{k-s}), A_3 = \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) v_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j-1}^{k-s}); \\ A_4 &= \theta_{i,j}^k - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) \theta_{i,j}^{k-s}, B_1 = \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) (\theta_{i,j}^{k-q} - \theta_{i,j}^{k-q-1}); \\ B_2 &= \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) u_{i,j}^{k-q-1} (\theta_{i,j}^{k-q} - \theta_{i-1,j}^{k-q}), B_3 = \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) v_{i,j}^{k-q-1} (\theta_{i,j}^{k-q} - \theta_{i,j-1}^{k-q}) \end{aligned} \right. \quad (27)$$

将公式(20)-(27)代入公式(14),得到动量方程(14)的迭代格式:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} r_1 u_{i,j}^{k-1}\right) u_{i-1,j}^k - \left[(1+r_1) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + r_2 E_1\right] u_{i,j-1}^k + \\ & \left[(1+r_1) \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1}\right) + (1+r_1) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + 2r_2 E_1 + r_3 E_1 \frac{\varepsilon}{Da}\right] u_{i,j}^k - \\ & r_2 E_1 u_{i,j+1}^k = \left(1+r_1 - 2r_2 E_1 - r_3 E_1 \frac{\varepsilon}{Da}\right) u_{i,j}^{k-1} + r_1 A_1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} r_1 A_2 + \frac{\Delta t}{\Delta y} r_1 A_3 + \\ & r_2 E_1 u_{i,j+1}^{k-1} + r_2 E_1 u_{i,j-1}^{k-1} + \Delta t E_2 \theta_{i,j}^k + \Delta t E_2 r_1 A_4 \end{aligned} \quad (28)$$

同样,能量方程(15)的迭代格式为:

$$\begin{aligned} & -(1+r_4) \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1} \theta_{i-1,j}^k - \left[(1+r_4) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + \frac{r_5}{H(\phi)}\right] \theta_{i,j-1}^k + \\ & \left[(1+r_4) \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1}\right) + (1+r_4) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + 2\frac{r_5}{H(\phi)}\right] \theta_{i,j}^k - \\ & \frac{r_5}{H(\phi)} \theta_{i,j+1}^k = \left[1+r_4 - 2\frac{r_5}{H(\phi)}\right] \theta_{i,j}^{k-1} + r_4 B_1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} r_4 B_2 + \frac{\Delta t}{\Delta y} r_4 B_3 + \frac{r_5}{H(\phi)} \theta_{i,j+1}^{k-1} + \frac{r_5}{H(\phi)} \theta_{i,j-1}^{k-1} \end{aligned} \quad (29)$$

连续性方程(13)的迭代格式为:

$$v_{i,j}^k = v_{i,j-1}^k - \frac{\Delta y}{\Delta x} (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) \quad (30)$$

边界条件(16)的迭代格式为:

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^0 = v_{i,j}^0 = \theta_{i,j}^0 = 0; u_{0,j}^k = \theta_{0,j}^k = 0; u_{i,0}^k = c_0(i-1)\Delta x + \frac{c_1}{\Delta y} (u_{i,1}^k - u_{i,0}^k) - \frac{c_2}{\Delta y^2} (u_{i,2}^k - 2u_{i,1}^k + u_{i,0}^k) \\ & v_{i,0}^k = 0, \frac{\theta_{i,1}^k - \theta_{i,0}^k}{\Delta y} = -\tau(1 - \theta_{i,0}^k); u_{i,N}^k = 0, \theta_{i,N}^k = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

通过在每个时间步长求解公式(17)(18),当 $t_k$ 达到收敛状态时,可以获得稳定状态下的平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数:

$$\overline{C_f}(t_k) = \left[ r_1 \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) \overline{C_f}(t_{k-s}) + \frac{Gr^{\frac{3}{4}}}{(1-\phi)^{2.5} Re^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx \right] / (1+r_1) \quad (32)$$

$$\overline{Nu}(t_k) = \left[ r_4 \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) \overline{Nu}(t_{k-q}) - \frac{k_{nf}}{k_f} Gr^{\frac{1}{4}} \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} dx \right] / (1+r_4) \quad (33)$$