doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2021.06.009

常微分方程波形松弛方法的收敛稳定

范振成

(闽江学院 数学与数据科学学院, 福建 福州 350108)

摘要:波形松弛方法是一种用于近似求解常微分方程的迭代方法,实际计算时,初始值和每次迭代计算不可避免存在误差,因此有必要研究误差的传播规律,即稳定性。对常微分方程,证明了在 Lipschitz 条件下 WR 方法是收敛稳定的,即在标准收敛条件下,只要初值和历次迭代的误差足够小,由 WR 方法所得近似解的扰动能被控制在给定范围内。

关键词:常微分方程;波形松弛方法;Lipschitz 条件;收敛稳定

中图分类号:O241.81 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-4348(2021)06-0556-04

Convergent stability of waveform relaxation methods for ordinary differential equations

FAN Zhencheng

(School of Mathematics and Data Science, Minjiang University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: The waveform relaxation (WR) method is an iterative method for the approximate solution of ordinary differential equations (ODEs). In actual calculation, the initial value and iterative calculation inevitably have errors. Thus, it is necessary to study the propagation law of errors, i.e., the stability. The convergent stability of WR methods for ODEs is proved under the Lipschitz condition. That is, under standard convergence conditions, the perturbation of approximate solutions obtained by WR methods can be controlled within a given range as long as the error between the initial value and the previous iteration is small enough.

Keywords: ordinary differential equation; waveform relaxation method; Lipschitz condition; convergent stability

在芯片(大规模集成电路)设计领域, 仿真计算作用重大。描述芯片的数学模型一般是高维的微分代数方程组, 使用诸如线性多步法和 Runge-Kutta 方法等经典数值方法进行仿真计算时, 因其计算量太大, 效果不理想。描述芯片的高维微分代数方程组, 一般是由若干联系微弱的小方程组构成, 针对这个特点, 基于解代数方程组的迭代法, Lelarasmee 等[1]提出了解微分方程的波形松弛(WR)方法, 其基本想法是先利用迭代技术将大系统分成若干独立的小系统, 然后根据各小系统的特点选用适合的经典数值方法进行求解计算。与经典方法相比, 波形松弛方法因具有并行性和多速率两个优点, 而更具优势。当实际计算时, WR 方法的初始值和中间过程不可避免存在误差, 因此研究误差的传播规律(即稳定性)是有意义的。

对 WR 方法的研究集中于收敛性, 稳定性的研究不多见。Bellen A 等[2]和范振成[3]专注于数值方法是否保持解析解的性质, 给出了离散 WR 方法的压缩或绝对稳定条件。考虑初值和过程误差是否可控问题, 范振成[4]提出了连续 WR 方法的收敛稳定, 给出了泛函微分方程波形松弛方法收敛稳定的条件。然而文献[4]中的条件较严格, 很多常见情形不满足。本文将证明在标准的 Lipschitz 条件下, 常微分方程初值问题的 WR 方法是收敛稳定的。

收稿日期:2021-09-27
基金项目:福建省自然科学基金资助项目(2021J011031)
作者简介:范振成(1971—),男,黑龙江依安县人,教授,博士,研究方向:常微分方程和随机微分方程的数值解法。

1　假设与准备

对泛函微分方程

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t),x(\cdot)),t\in J=[0,T] \\ x(t)=g(t),t\in I=[-\tau,0] \end{cases} \tag{1}$$

的连续 WR 方法(下文简称 WR 方法)

$$\begin{cases} x'_{k+1}=F(t,x_{k+1}(t),x_k(t),x_k(\cdot)),t\in J \\ x_{k+1}(t)=g(t),t\in I \end{cases} \tag{2}$$

其中,分裂函数 $F(t,x,x,y(\cdot))=f(t,x,y(\cdot))$,初始解 $x_0(t)=g(t),t\in I,k=0,1,\cdots$。文献[4]证明了当 F 满足单边 Lipschitz 条件(H1)和全局 Lipschtiz 条件(H2)时, F 和 g 的微小变化所引起的解序列 $\{x_k\}$ 变化可控,文献[4]中称之为收敛稳定,说明了 WR 方法具有较强的抗干扰能力。然而文献[4]中的条件(H1)较严格,很多常见情形不满足(H1)。

考虑常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)),t\in J \\ y(0)=\xi \end{cases} \tag{3}$$

及其 WR 方法

$$\begin{cases} y'_{k+1}(t)=F(t,y_{k+1}(t),y_k(t)),t\in J \\ y_{k+1}(0)=\xi,y_0(t)\equiv\xi \end{cases} \tag{4}$$

其中, $y,y_k\in C^1(J,\mathbf{R}^n),F(t,x,x)=f(t,x)$。此处和下文用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实数域, $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{R}_-$ 表示负实数集, $\mathbf{R}_+$ 表示正实数集, $C^1(J,\mathbf{Q})$ 表示区间 J 到数集 $\mathbf{Q}$ 上有一阶连续导数的函数集, $C(J,\mathbf{Q})$ 表示 J 到 $\mathbf{Q}$ 上连续函数集。

假设分裂函数满足以下两个 Lipschitz 条件:

(H3)存在连续函数 $m\in C(J,\mathbf{R}_-)$ 满足 $\max\limits_{t\in J}m(t)<v<0$($v$ 为给定常数),使得对所有 $t\in J,x,\tilde{x},y\in\mathbf{R}^n$,

$\langle F(t,x,y)-F(t,\tilde{x},y),x-\tilde{x}\rangle\leqslant m(t)\cdot\|x-\tilde{x}\|^2$

(H4)存在非负单调不减连续函数 $K\in C(J,\mathbf{R}_+)$ 使得对所有 $t\in J,x,y,\tilde{y}\in\mathbf{R}^n$,

$$\|F(t,x,y)-F(t,x,\tilde{y})\|\leqslant K(t)\|y-\tilde{y}\|$$

其中, $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 表示内积, $\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}$。

此时,文献[4]的结果变成:当(H3)和(H4)成立时, WR 方法式(4)是收敛稳定的,即式(4)与其扰动系统

$$\begin{cases} \tilde{y}'_{k+1}(t)=F(t,\tilde{y}_{k+1}(t),\tilde{y}_k(t))+\delta_{k+1}(t),t\in J \\ \tilde{y}_{k+1}(0)=\xi+\varepsilon_{k+1},\tilde{y}_0(t)\equiv\xi+\varepsilon_0 \end{cases} \tag{5}$$

解的差满足:存在 $C>0$ 使得

$$\max_k\max_{t\in J}\|y_k(t)-\tilde{y}_k(t)\|\leqslant C\max\{\max_{k\geqslant 0}\|\varepsilon_k\|,\max_{k\geqslant 1}\max_{t\in J}\|\delta_k(t)\|\}$$

由于条件(H3)中的 $m(t)<0$, 这是较严格的限制, 排除了诸如 $F(t,x,y)=x+y$ 等常见情况, 考虑更宽松的标准 Lipschitz 条件:

(H1′) 存在常数 $L\in\mathbf{R}$, 使得对所有 $t\in J$, $x,\tilde{x},y\in\mathbf{R}^n$,

$\langle F(t,x,y)-F(t,\tilde{x},y),x-\tilde{x}\rangle\leqslant L\cdot\|x-\tilde{x}\|^2$

(H2′) 存在常数 $K>0$, 使得对所有 $t\in J$, $x,y,\tilde{y}\in\mathbf{R}^n$,

$$\|F(t,x,y)-F(t,x,\tilde{y})\|\leqslant K\|y-\tilde{y}\|$$

式中, L 可以取正数, 因此(H1′)比(H3)更宽松, 在(H1′)使用 $L\in\mathbf{R}$ 而不是更简单的 $L>0$, 只是为了扰动解的误差上限更准确, 后文将推出其与 $L+K$ 有关, 见式(8)。此外, 若(H4)成立, 则(H2′)成立, 这说明(H2′)比(H4)更宽松。

本文将证明当(H1′)和(H2′)成立时, WR 方法(4)是收敛稳定的。首先证明两个引理。

引理 1 .1 当(H1′)和(H2′)成立时, WR 方法式(4)产生的函数序列 $\{y_k\}$ 收敛于式(3)的解, 即

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in J}\|y_k(t)-y(t)\|=0$$

证明:由文献[5]中定理 7.3 或式(7.15), 易知本引理成立。

引理 1.2 假设 $u\in C^1(J,\mathbf{R}_+),v\in C(J,\mathbf{R}_+)$, $L_1\neq 0,L_2>0,\gamma_1>0,\gamma_2>0$ 且

$$\begin{cases} u'(t)\leqslant L_1u(t)+L_2v(t)+\gamma_1,t\in J \\ u(0)=\gamma_2 \end{cases} \tag{6}$$

若存在 $\gamma\geqslant\max\{\gamma_1,\gamma_2\},V\in C(J,\mathbf{R}_+),U\in C^1(J,\mathbf{R})$ 满足 $V(t)>v(t),t\in J$ 和

$$\begin{cases} U'(t)=L_1U(t)+L_2V(t)+\gamma,t\in J \\ U(0)=\gamma \end{cases} \tag{7}$$

则 $U(t)\geqslant u(t),t\in J$。

证明:式(7)减式(6)得

$$\begin{cases} (U(t)-u(t))'\geqslant L_1(U(t)-u(t))+ \\ L_2(V(t)-v(t))+\gamma-\gamma_1 \\ U(0)-u(0)=\gamma-\gamma_2>0 \end{cases}$$

两边乘以 $e^{-L_1 t}$ 得

$$(e^{-L_1 t}(U(t)-u(t)))' \geqslant e^{-L_1 t}L_2(V(t)-v(t)) + e^{-L_1 t}(\gamma-\gamma_1)$$

两边从 0 到 t 积分得

$$e^{-L_1 t}(U(t)-u(t)) \geqslant \gamma-\gamma_2 + \int_0^t e^{-L_1 s}L_2(V(s)-v(s))ds + \int_0^t e^{-L_1 s}(\gamma-\gamma_1)ds$$

由引理条件，上式右端大于零，因此 $U(t) \geqslant u(t), \forall t \in J$. 证毕。

2 主要结果

定理 2.1 当(H1′)和(H2′)成立时，WR 方法式(4)是收敛稳定的，即式(4)和它的扰动系统式(5)生成的函数序列满足：

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in J}\|y_k(t)-\tilde{y}_k(t)\| \leqslant \max\{1, e^{MT}+\frac{1}{M}(e^{MT}-1)\}\varepsilon \tag{8}$$

其中，$M=L+K, \varepsilon=\max\{\max_{k\geqslant0}\|\varepsilon_k\|, \max_{k\geqslant1}\max_{t\in J}\|\delta_k(t)\|\}$.

证明：记 $\eta_k=\tilde{y}_k-y_k, k=0,1,\cdots$. 式(5)减式(4)得

$$\begin{cases}\eta'_{k+1}(t)=F(t,\tilde{y}_{k+1}(t),\tilde{y}_k(t)) - F(t,y_{k+1}(t),y_k(t))+\delta_{k+1}(t), t\in J\\ \eta_{k+1}(0)=\varepsilon_{k+1}, \eta_0(t)\equiv\varepsilon_0\end{cases}$$

由此式和内积的性质，得

$$\begin{aligned}&\langle\eta_{k+1}(t),\eta_{k+1}(t)\rangle'=2\langle\eta_{k+1}(t),\eta'_{k+1}(t)\rangle=\\&2\langle\eta_{k+1}(t),F(t,\tilde{y}_{k+1}(t),\tilde{y}_k(t))-F(t,y_{k+1}(t),y_k(t))\rangle+2\langle\eta_{k+1}(t),\delta_{k+1}(t)\rangle=\\&2\langle\eta_{k+1}(t),F(t,\tilde{y}_{k+1}(t),\tilde{y}_k(t))-F(t,y_{k+1}(t),\tilde{y}_k(t))\rangle+2\langle\eta_{k+1}(t),F(t,y_{k+1}(t),\tilde{y}_k(t))-F(t,y_{k+1}(t),y_k(t))\rangle+2\langle\eta_{k+1}(t),\delta_{k+1}(t)\rangle\end{aligned}$$

由上式，(H1′)、(H2′)以及 Cauchy-Schwarz 不等式，推导出

$$\langle\eta_{k+1}(t),\eta_{k+1}(t)\rangle' \leqslant 2L\|\eta_{k+1}(t)\|^2 + 2K\|\eta_{k+1}(t)\|\|\eta_k(t)\|+2\|\eta_{k+1}(t)\|\|\delta_{k+1}(t)\| \tag{9}$$

另一方面

$$\langle\eta_{k+1}(t),\eta_{k+1}(t)\rangle'=(\|\eta_{k+1}(t)\|^2)'=2\|\eta_{k+1}(t)\|(\|\eta_{k+1}(t)\|)' \tag{10}$$

由式(9)和(10)得

$$\begin{cases}(\|\eta_{k+1}(t)\|)' \leqslant L\|\eta_{k+1}(t)\| + K\|\eta_k(t)\|+\|\delta_{k+1}(t)\|, t\in J\\ \|\eta_{k+1}(0)\|=\|\varepsilon_{k+1}\|, \|\eta_0(t)\|\equiv\|\varepsilon_0\|\end{cases} \tag{11}$$

记 $\varepsilon=\max\{\max_{k\geqslant0}\|\varepsilon_k\|, \max_{k\geqslant1}\max_{t\in J}\|\delta_k(t)\|\}$，令 $z_k\in C^1(J,\mathbf{R}_+), k=0,1,\cdots$ 满足

$$\begin{cases}z'_{k+1}(t)=Lz_{k+1}(t)+Kz_k(t)+\varepsilon, t\in J\\ z_{k+1}(0)=\varepsilon, z_0(t)\equiv\varepsilon\end{cases} \tag{12}$$

由式(11)(12)和引理 1.2，不难证明

$$\|\eta_k(t)\| \leqslant z_k(t), \forall t\in J, \forall k=0,1,\cdots \tag{13}$$

又由引理 1.1，(12)生成的函数列收敛于下面微分方程的解

$$\begin{cases}v'(t)=(L+K)v(t)+\varepsilon, t\in J\\ v(0)=\varepsilon\end{cases} \tag{14}$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in J}\|z_k(t)-v(t)\|=0 \tag{15}$$

由式(13)(14)和(15)，易得

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in J}\|\eta_k(t)\| \leqslant \max_{t\in J}v(t) \tag{16}$$

其中，$v(t)=(e^{Mt}+\frac{1}{M}e^{Mt}-\frac{1}{M})\varepsilon$ 是方程(14)的解 $(M=L+K)$，满足：$v(t)\geqslant0, \forall t\in J$；$v(t)<v(0)$，对 $M\leqslant-1$；$v(t)<v(T)$ 对 $M>-1$。最后由上式和(16)，得(8)，证毕。

3 定理应用

对于 WR 方法式(4)，若已知 y_k 时，能够准确算出 y_{k+1}，则得到的函数序列 $\{y_k\}$ 的极限为式(3)的解(引理 1.1)。然而，对大多数方程，这是不可能的，一般利用数值方法和插值求近似等于 y_{k+1} 的函数。常用的离散 WR 方法的算法如下：

第 1 步：令 $\tilde{y}_0(t)\equiv\xi, \tilde{y}_1(0)=\xi, k=0$;

第 2 步：选择适当的数值方法计算方程

$$\begin{cases}z'_{k+1}(t)=F(t,z_{k+1}(t),\tilde{y}_k(t)), t\in J\\ z_{k+1}(0)=\xi\end{cases} \tag{17}$$

在节点 $\{0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T\}$ 处解 $z_{k+1}(t_i)$ 的近似值；

第 3 步：用插值方法将第 2 步得到的近似值连续化，得到区间 J 上 z_{k+1} 的近似解 $\tilde{y}_{k+1}$；

第 4 步：$k=k+1$，转第 2 步重复计算，直至

收敛为止。

注意式(17)等价于

$$z_{k+1}(t) = \xi + \int_0^t F(s, z_{k+1}(s), \tilde{y}_k(s))\,\mathrm{d}s, t \in J \tag{18}$$

记 $\eta_{k+1} = \tilde{y}_{k+1} - z_{k+1}$，代入式(18)，再求导数，不难推出上述算法算得的 $\{\tilde{y}_k\}$ 满足：

$$\begin{cases} \tilde{y}'_{k+1}(t) = F(t, \tilde{y}_{k+1}(t), \tilde{y}_k(t)) + \delta_{k+1}(t), t \in J \\ \tilde{y}_{k+1}(0) = \xi + \varepsilon_{k+1} \end{cases}$$

其中，$\delta_{k+1}(t) = \eta'_{k+1}(t) + F(t, \tilde{y}_{k+1}(t) - \eta_{k+1}(t), \tilde{y}_k(t)) - F(t, \tilde{y}_{k+1}(t), \tilde{y}_k(t))$，$\varepsilon_{k+1} = \eta_{k+1}(0)$.

当(H1′)和(H2′)成立时，由引理 1.1 和定理 2.1，知存在 $C > 0$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in J} \| \tilde{y}_k(t) - y(t) \| \leqslant C\max\{\max_k \| \eta_k(0) \|, \max_k \max_{t\in J}(\| \eta'_k(t) \| + |L| \| \eta_k(t) \|)\}$$

其中，y 是方程(3)的解。

综上,说明只要离散 WR 方法的第 2 步和第 3 步所获得的近似解的误差 $\eta_k(t)$ 及其导数 $\eta'_k(t)$ 足够小，则离散 WR 方法得到的近似解序列的极限与方程(3)解的差可任意小，即本文结论从不同角度揭示了前述离散 WR 方法的合理性。

4　数值实验

考虑方程(3)至方程(5)，选取 $f(t,y) = \boldsymbol{A}y + b(t)$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$J = [0,1], \xi = (1,0,1)^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

为了简单,选固定扰动 $\delta_k(t) \equiv \delta, \varepsilon_k \equiv \varepsilon$。使用 Jacobi 分裂函数，即

$$F(t,x,y) = \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_2 y + b(t) \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{A}_1$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素构成的对角阵，$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_1$。显然分裂函数 F 满足(H1′)但不满足(H3). 下面验证式(8)，然而 $y_k, \tilde{y}_k$ 的解析表达式很难获得，用步长 $h = 0.0001$ 的 Euler 方法生成的近似解近似代替。记 $N = 1/h$，$t_n = nh, n = 0,1,\cdots,N$，$u_k = \max_{n\in\{0,1,\cdots,N\}} \| \tilde{y}_k(t_n) - y_k(t_n) \|$，$i = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 在表 1 中罗列了满足式(19)(20)的方法(4)的不同扰动 δ，ε 引起的误差，从中清楚看到扰动引起的误差不能忽视，但可控。

表 1　满足(19)(20)的方法(4)的不同扰动引起的误差 u_k

Tab.1　Errors brought by different perturbations for method (4) with (19) and (20)

扰动：$\begin{pmatrix}\delta\\ \varepsilon\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10^{-2}i\\ i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10^{-2}i\\ 0.1i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10^{-3}i\\ i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10^{-3}i\\ 0.1i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-10^{-3}i\\ i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-10^{-3}i\\ 0.1i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10^{-10}i\\ 10^{-5}i\end{pmatrix}$
误差：u_{50}	183.9944	140.7831	61.6332	18.3994	34.4645	8.8008	4.94e-004
误差：u_{100}	183.994	140.7831	61.6332	18.3994	34.4645	8.8008	4.94e-004

参考文献：

[1] LELARASMEE E, RUEHLI A E, SANGIOVANNI-VINCENTELLI A L. The waveform relaxation method for time-domain analysis of large scale integrated circuits[J]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 1982, 1(3): 131-145.

[2] BELLEN A, JACKIEWICZ Z, ZENNARO M. Contractivity of waveform relaxation runge-kutta iterations and related limit methods for dissipative systems in the maximum norm[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(2): 499-523.

[3] 范振成. 波形松弛方法的绝对稳定与压缩[J]. 数值计算与计算机应用, 2019, 40(3): 230-242.

[4] 范振成. 泛函微分方程波形松弛方法的收敛稳定[J]. 高校应用数学学报(A 辑), 2020, 35(1): 73-82.

[5] BARTOSZEWSKI Z, KWAPISZ M. On error estimates for waveform relaxation methods for delay-differential equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, 38(2): 639-659.

(责任编辑：陈雯)