

# 导体圆柱空间电型并矢格林函数的构建

雒向东<sup>1,2</sup>,海波<sup>3</sup>,赵宇杰<sup>1</sup>,梁晔<sup>1</sup>

(1.兰州城市学院电子工程学院,甘肃 兰州 730070;

2.甘肃高师学报编辑部,甘肃 兰州 730070;

3.兰州城市学院信息工程学院,甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 基于圆柱坐标系中圆柱矢量波函数,研究自由空间圆柱并矢格林函数。将其应用于导体圆柱空间推证出了导体圆柱的第一、二类电型并矢格林函数,并就这些函数的关系做了分析。推得的电型并矢格林函数可为并矢格林函数方法处理圆柱型导体电磁散射等问题提供研究方法和理论依据。

**关键词:** 圆柱坐标系;导体圆柱;矢量波函数;并矢格林函数

中图分类号: O441.4

文献标志码: A

文章编号: 1672-4348(2021)06-0550-06

## Construction of electric dyadic Green's functions for conductor cylindrical space

LUO Xiangdong<sup>1,2</sup>, HAI Bo<sup>3</sup>, ZHAO Yujie<sup>1</sup>, LIANG Ye<sup>1</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Lanzhou City University, Lanzhou 730070, China;

2. Editorial Department of Journal of Gansu Normal Colleges, Lanzhou 730070, China;

3. School of Information Engineering, Lanzhou City University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** Based on the cylindrical vector wave functions in the cylindrical coordinate system, the first and second types of electric dyadic Green's functions of the conductor cylinder were proved through studying the free space cylindrical dyadic Green's functions and applying the functions to the space of the conductor cylinder. And the relationships of these functions were analyzed. The electric dyadic Green's functions derived from above analysis can provide research method and theoretical basis for using DGF method to deal with electromagnetic scattering of cylindrical conductors.

**Keywords:** cylindrical coordinate system; cylindrical conductors; vector wave functions; dyadic Green's functions

圆柱体是工程应用中常见的电磁辐射与散射模型,其电磁场边值问题的求解往往涉及圆柱矢量波函数的构建<sup>[1-4]</sup>。在圆柱坐标系中用圆柱矢量波函数表示自由空间辐射或散射场是极为方便的。当获得自由空间圆柱矢量波函数展开式后,应用散射叠加方法,可导出其它类型的并矢格林函数(dyadic Green's functions, DGF)。应用 DGF 方法解决电磁理论及工程边值问题,主要难点就是要构建并矢格林函数。对这一问题国内外学者已做了大量研究<sup>[5-13]</sup>,对规则形状波导、平面分层媒质、常用坐标系等问题的研究已有一致的结果,但关于导

体圆柱散射场等问题的研究比较少。本研究基于圆柱坐标系中圆柱矢量波函数及其正交归一性质,从自由空间构建的并矢格林函数出发,推证出了导体圆柱空间的第一、二类电型并矢格林函数。

### 1 圆柱矢量波函数及其正交归一性

在圆柱坐标系中基于圆柱矢量波函数研究电磁场边值问题,首先需要确定柱型矢量波函数及其正交归一性质,这一问题在戴振铎、鲁述相关文献中已有表述<sup>[8]</sup>,基本理论如下:

圆柱矢量波函数  $M$ 、 $N$  定义为  $M_{\zeta n \lambda}$ 、 $N_{\zeta n \lambda}$  两组

收稿日期: 2021-08-28

基金项目: 甘肃省高等学校通信工程省级一流专业建设项目(2019);甘肃省高等学校通信工程省级创新创业改革试点专业建设项目(2019)

第一作者简介: 雒向东(1965—),男,甘肃靖远人,教授,博士,研究方向:无线电物理。

矢量波函数

$$\mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) = \nabla \times \left[ \mathbf{J}_n(\lambda r) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} e^{-ihz} \mathbf{e}_z \right] = \left[ \mp \frac{n\mathbf{J}_n(\lambda r)}{r} \frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \mathbf{J}_n(\lambda r)}{\partial r} \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \mathbf{e}_\varphi \right] e^{-ihz} \quad (1)$$

$$\mathbf{N}_{\varphi n\lambda}(h) = \frac{1}{\kappa_\lambda} \nabla \times \nabla \times \left[ \mathbf{J}_n(\lambda r) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} e^{-ihz} \mathbf{e}_z \right] = \frac{1}{\kappa_\lambda} \left[ -ih \frac{\partial \mathbf{J}_n(\lambda r)}{\partial r} \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \mathbf{e}_r \pm \frac{ihn\mathbf{J}_n(\lambda r)}{r} \frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \lambda^2 \mathbf{J}_n(\lambda r) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \mathbf{e}_z \right] e^{-ihz} \quad (2)$$

公式(1)中双行符号是同时表示两个式子的一种符号表示方法,它实质上是指这样两个式子:

$$\mathbf{M}_{en\lambda}(h) = \nabla \times [\mathbf{J}_n(\lambda r) \cos n\varphi e^{-ihz} \mathbf{e}_z] = \left[ -\frac{n\mathbf{J}_n(\lambda r)}{r} \sin n\varphi \mathbf{e}_r - \frac{\partial \mathbf{J}_n(\lambda r)}{\partial r} \cos n\varphi \mathbf{e}_\varphi \right] e^{-ihz}$$

$$\mathbf{M}_{on\lambda}(h) = \nabla \times [\mathbf{J}_n(\lambda r) \sin n\varphi e^{-ihz} \mathbf{e}_z] = \left[ \frac{n\mathbf{J}_n(\lambda r)}{r} \cos n\varphi \mathbf{e}_r - \frac{\partial \mathbf{J}_n(\lambda r)}{\partial r} \sin n\varphi \mathbf{e}_\varphi \right] e^{-ihz}$$

式中  $h$  和  $\lambda$  为连续取值,下标“e”表示偶函数,“o”表示奇函数,其它双行符号式子含义同此。公式(1)和(2)在整个空间区域 ( $\infty > r \geq 0$ ,  $2\pi > \varphi \geq 0$ ,  $\infty > z > -\infty$ ) 均有定义,且满足以下正交归一性:

$$\int \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) \cdot \mathbf{N}_{\varphi n'\lambda'}(-h') dV = 0 \quad (3)$$

$$\int \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) \cdot \mathbf{M}_{\varphi n'\lambda'}(-h) dV = \begin{cases} 0 & (n \neq n') \\ (1 + \delta_0) 2\pi^2 \lambda \delta(\lambda - \lambda') \delta(h - h') & (n = n') \end{cases} \quad (4)$$

$$\int \mathbf{N}_{\varphi n\lambda}(h) \cdot \mathbf{N}_{\varphi n'\lambda'}(-h') dV = \begin{cases} 0 & (n \neq n') \\ (1 + \delta_0) 2\pi^2 \lambda \delta(\lambda - \lambda') \delta(h - h') & (n = n') \end{cases} \quad (5)$$

式中,积分区域为整个空间。

## 2 构建自由空间并矢格林函数

自由空间并矢格林函数是构建导体圆柱空间并矢格林函数的基础,本研究先构建自由空间并

矢格林函数,再将其应用于导体圆柱空间推证其第一、二类电型并矢格林函数。

自由空间磁型并矢格林函数  $\bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  满足如下波动方程<sup>[14]</sup>:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') - k^2 \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \nabla \times [\bar{\bar{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \quad (6)$$

和无穷远处的辐射条件,其表达式为<sup>[8]36</sup>:

$$\bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \nabla \times [\bar{\bar{I}} G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] = \nabla G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \times \bar{\bar{I}} \quad (7)$$

式(7)中,  $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  为三维标量波动方程的自由空间格林函数,  $\mathbf{R}'$  表示源点位置矢量,  $\mathbf{R}$  表示场点或观察点的位置矢量,具体为:

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{e^{-ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}$$

$$|\mathbf{R}-\mathbf{R}'| = \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

依据欧姆—瑞利方法来确定  $\bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  的本征展开式,假设

$$\nabla \times [\bar{\bar{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] =$$

$$\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty dh \sum_{n=0}^\infty [\mathbf{N}_{\varphi n\lambda}(h) \mathbf{A}_{\varphi n\lambda}(h) + \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) \mathbf{B}_{\varphi n\lambda}(h)] \quad (9)$$

式(9)中,本征值  $\lambda$  只取正实轴上的值,取  $\mathbf{N}_{\varphi n'\lambda'}(-h')$  作为(9)式的前标积,在整个空间积分,利用式(3)~(5)正交归一关系,可求得:

$$\mathbf{A}_{\varphi n\lambda}(h) = \frac{(2 - \delta_0)}{4\pi^2 \lambda} \nabla' \times \mathbf{N}'_{\varphi n\lambda}(-h) = \frac{(2 - \delta_0) \kappa}{4\pi^2 \lambda} \mathbf{M}'_{\varphi n\lambda}(-h) \quad (10)$$

$\mathbf{N}'$ 、 $\mathbf{M}'$  函数是对空间位置矢量  $\mathbf{R}'(x', y', z')$  坐标定义的,同时对式(9)取  $\mathbf{M}_{\varphi n'\lambda'}(-h')$  为前标积,用同样方法可得另一展开系数为:

$$\mathbf{B}_{\varphi n\lambda}(h) = \frac{(2 - \delta_0) \kappa}{4\pi^2 \lambda} \mathbf{N}'_{\varphi n\lambda}(-h) \quad (11)$$

将式(10)和(11)代入式(9)可求得  $\nabla \times [\bar{\bar{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')]$  的连续谱本征函数展开式为:

$$\nabla \times [\bar{\bar{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] = \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty dh \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_0) \kappa}{4\pi^2 \lambda}$$

$$[N_{\varphi n\lambda}(h) \mathbf{M}'_{\varphi n\lambda}(-h) + \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) N'_{\varphi n\lambda}(-h)] \quad (12)$$

设  $\bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  有类似于式(9)的展开式,  $\mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h), N_{\varphi n\lambda}(h)$  满足齐次矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) = \kappa^2 \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) \quad (13)$$

$$\nabla \times \nabla \times N_{\varphi n\lambda}(h) = \kappa^2 N_{\varphi n\lambda}(h) \quad (14)$$

将式(12)代入式(6), 利用式(13)和(14)可推得

$$\begin{aligned} & \nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') - k^2 \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \\ & \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty dh \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_0) \kappa}{4\pi^2 \lambda} \\ & [N_{\varphi n\lambda}(h) \mathbf{M}'_{\varphi n\lambda}(-h) + \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) N'_{\varphi n\lambda}(-h)] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty dh \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_0) \kappa}{4\pi^2 \lambda (\kappa^2 - k^2)} \\ & [N_{\varphi n\lambda}(h) \mathbf{M}'_{\varphi n\lambda}(-h) + \mathbf{M}_{\varphi n\lambda}(h) N'_{\varphi n\lambda}(-h)] \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)中,

$$\kappa = (\lambda^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

取积分回路沿上半  $\lambda$  平面的半无限圆路径, 利用留数定理完成积分<sup>[8]</sup>, 式(16)计算结果为:

$$\bar{\bar{G}}_{m0}^{\pm}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{ik}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty dh \sum_{n=0}^\infty \frac{2 - \delta_0}{\eta^2} \cdot$$

$$\begin{cases} N_\eta^{(1)}(h) \mathbf{M}'_\eta(-h) + \mathbf{M}_\eta^{(1)}(h) N'_\eta(-h) & (r > r') \\ N_\eta(h) \mathbf{M}'_\eta^{(1)}(-h) + \mathbf{M}_\eta(h) N_\eta^{(1)}(-h) & (r < r') \end{cases} \quad (18)$$

式(18)中,

$$\eta = (k^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_\eta^{(1)}(h) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times [H_n^{(1)}(\eta r) e^{-ihz} \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_z}{\sin n\varphi \mathbf{e}_z}] \quad (19)$$

$$\mathbf{M}'_\eta^{(1)}(-h) = \nabla' \times [H_n^{(1)}(\eta r') e^{ihz'} \frac{\cos n\varphi' \mathbf{e}_z}{\sin n\varphi' \mathbf{e}_z}] \quad (20)$$

$H_n^{(1)}$  表示第一类汉克尔函数,  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  的上标(1)表示该圆柱矢量波函数中的径向函数是对第一类汉克尔函数定义的。

由于  $\bar{\bar{G}}_{m0}$  在  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  处不连续, 该函数满足不连续磁型并矢格林函数方程:

$$\mathbf{e}_r \times (\bar{\bar{G}}_{m0}^+ - \bar{\bar{G}}_{m0}^-) = \bar{\bar{I}}_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (21)$$

$$\bar{\bar{I}}_s = \bar{\bar{I}} - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \quad (22)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(z - z') \delta(\varphi - \varphi') \quad (23)$$

$$\mathbf{e}_r \times (\bar{\bar{G}}_{m2}^+ - \bar{\bar{G}}_{m2}^-) = (\bar{\bar{I}} - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r) \delta(z - z') \delta(\varphi - \varphi') \quad (24)$$

式(21)中,  $\bar{\bar{G}}_{m0}^+$  适用于  $r > r'$ ,  $\bar{\bar{G}}_{m0}^-$  适用于  $r < r'$ , 点源安放在  $\mathbf{R}'$  处。

对  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  处不连续的函数,  $\bar{\bar{G}}_{m0}$  满足如下方程:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \bar{\bar{G}}_{m0}^+(\mathbf{R}, \mathbf{R}') U(r - r') + \\ & \bar{\bar{G}}_{m0}^-(\mathbf{R}, \mathbf{R}') U(r' - r) \end{aligned} \quad (25)$$

两个单位阶跃函数为:

$$U(r - r') = \begin{cases} 1 & r > r' \\ 0 & r < r' \end{cases} \quad (26)$$

$$U(r' - r) = \begin{cases} 1 & r < r' \\ 0 & r > r' \end{cases} \quad (27)$$

将式(26)和(27)代入式(25)可进一步推得:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}^+(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \times \\ & U(r - r') + \nabla U(r - r') \times \bar{\bar{G}}_{m0}^+(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + \\ & [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}^-(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] U(r' - r) + \\ & \nabla U(r' - r) \times \bar{\bar{G}}_{m0}^-(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \end{aligned} \quad (28)$$

依据广义函数理论:

$$\nabla U(r - r') = \mathbf{e}_r \delta(r - r') \quad (29)$$

$$\nabla U(r' - r) = -\mathbf{e}_r \delta(r - r') \quad (30)$$

将式(29)和(30)代入式(28)得:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}^+(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] U(r - r') + \\ & [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}^-(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] U(r' - r) + (\bar{\bar{I}} - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \end{aligned} \quad (31)$$

$\bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  满足如下方程:

$$\bar{\bar{G}}_{e0} = \frac{1}{k^2} [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0} - \bar{\bar{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \quad (32)$$

把式(31)代入式(32)得:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \frac{1}{k^2} [ [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}^+(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] U(r - r') + \\ & [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}^-(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] U(r' - r) - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') ] \end{aligned} \quad (33)$$

其中,

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m0}^{\pm}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{ik^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta^2} \cdot$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{M}'_{\eta}(-h) + \mathbf{N}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{N}'_{\eta}(-h) & (r > r') \\ \mathbf{M}_{\eta}(h)\mathbf{M}'_{\eta}(-h) + \mathbf{N}_{\eta}(h)\mathbf{N}'_{\eta}(-h) & (r < r') \end{cases} \quad (34)$$

将式(34)代入式(33)得电型并矢格林函数为:

$$\bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -\frac{1}{k^2} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta^2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{M}'_{\eta}(-h) + \mathbf{N}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{N}'_{\eta}(-h) & (r > r') \\ \mathbf{M}_{\eta}(h)\mathbf{M}'_{\eta}(-h) + \mathbf{N}_{\eta}(h)\mathbf{N}'_{\eta}(-h) & (r < r') \end{cases} \quad (35)$$

式(35)中,上行符号对应的是  $r > r'$ ,下行符号对应  $r < r'$ 。

### 3 构建导体圆柱空间的并矢格林函数

设自由空间有一半径为  $a$  的无限长导体圆柱,其轴线与  $z$  轴重合,根据散射叠加方法<sup>[13]</sup>,第一类电型并矢格林函数可设为:

$$\bar{\bar{G}}_{e1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + \bar{\bar{G}}_{1s}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \quad (36)$$

第一类电型并矢格林函数在圆柱面上满足狄里克莱条件,无穷远处满足辐射条件。这里散射项  $\bar{\bar{G}}_{1s}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  必含有向外行波,且满足齐次波动方程,因此散射项必然有下面形式的展开式:

$$\bar{\bar{G}}_{1s}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_0)}{\eta^2} [a_{\eta} \mathbf{M}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{M}'_{\eta}(-h) + b_{\eta} \mathbf{N}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{N}'_{\eta}(-h)] \quad (37)$$

式(37)中  $a_{\eta}, b_{\eta}$  为待定系数,为求得待定系数  $a_{\eta}, b_{\eta}$ ,应用  $r = a$  柱面上满足的狄里克莱条件:

$$\mathbf{e}_r \times [\bar{\bar{G}}_{e1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')]_{r=a} = 0 \quad (38)$$

将导体圆柱第一类电型并矢格林函数关系式(36)代入边界条件式(38)得:

$$\mathbf{e}_r \times [\bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + \bar{\bar{G}}_{1s}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')]_{r=a} = 0 \quad (39)$$

将自由空间电型并矢格林函数关系式(35)和圆柱散射项展开式(37)代入式(39)得

$$\mathbf{e}_r \times \left[ -\frac{1}{k^2} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta^2} [\mathbf{M}_{\eta}(h)\mathbf{M}'_{\eta}(-h) + \mathbf{N}_{\eta}(h)\mathbf{N}'_{\eta}(-h)] + \right.$$

$$\left. \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_0)}{\eta^2} [a_{\eta} \mathbf{M}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{M}'_{\eta}(-h) + b_{\eta} \mathbf{N}_{\eta}^{(1)}(h)\mathbf{N}'_{\eta}(-h)] \right]_{r=a} = 0 \quad (40)$$

式(40)等效于以下两个方程

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r \times [\mathbf{M}_{\eta}(h) + a_{\eta} \mathbf{M}_{\eta}^{(1)}(h)]_{r=a} = 0 \\ \mathbf{e}_r \times [\mathbf{N}_{\eta}(h) + b_{\eta} \mathbf{N}_{\eta}^{(1)}(h)]_{r=a} = 0 \end{cases} \quad (41)$$

对式(41)中两方程分别求解,将  $\mathbf{M}_{\eta}(h), \mathbf{M}_{\eta}^{(1)}(h)$  关系代入方程式(41)的第一式得

$$\mathbf{e}_r \times \left[ \nabla \times [\mathbf{J}_n(\eta r) \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_z}{\sin n\varphi} e^{-ihz}] + a_{\eta} \nabla \times [\mathbf{H}_n^{(1)}(\eta r) e^{-ihz} \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_z}{\sin n\varphi}] \right]_{r=a} = 0 \quad (42)$$

$$a_{\eta} = -\frac{J'_n(x)}{H_n^{(1)}(x)} \quad x = \eta a \quad (43)$$

将  $\mathbf{N}_{\eta}(h), \mathbf{N}_{\eta}^{(1)}(h)$  关系代入方程式(41)的第二式得

$$\mathbf{e}_r \times \left[ \frac{1}{\kappa_{\eta}} \left[ -ih \frac{\partial \mathbf{J}_n(\eta r)}{\partial r} \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_r}{\sin n\varphi} \pm \frac{ihn \mathbf{J}_n(\eta r)}{r} \frac{\sin n\varphi \mathbf{e}_{\varphi}}{\cos n\varphi} + \eta^2 \mathbf{J}_n(\eta r) \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_z}{\sin n\varphi} \right] e^{-ihz} + b_{\eta} \frac{1}{\kappa_{\eta}} \left[ -ih \frac{\partial \mathbf{H}_n^{(1)}(\eta r)}{\partial r} \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_r}{\sin n\varphi} \pm \frac{ihn \mathbf{H}_n^{(1)}(\eta r)}{r} \frac{\sin n\varphi \mathbf{e}_{\varphi}}{\cos n\varphi} + \eta^2 \mathbf{H}_n^{(1)}(\eta r) \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_z}{\sin n\varphi} \right] e^{-ihz} \right]_{r=a} = 0 \quad (44)$$

$$b_{\eta} = -\frac{J_n(x)}{H_n^{(1)}(x)} \quad x = \eta a \quad (45)$$

将解得的系数式(43)和(45)代入式(36)得无限长导体圆柱对应的第一类电型并矢格林函数为

$$\bar{\bar{G}}_{e1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -\frac{1}{k^2} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta^2} \cdot \left\{ \left[ \mathbf{M}_{\eta}(h) - \frac{J'_n(x)}{H_n^{(1)}(x)} \mathbf{M}_{\eta}^{(1)}(h) \right] \mathbf{M}'_{\eta}(-h) + \left[ \mathbf{N}_{\eta}(h) - \frac{J_n(x)}{H_n^{(1)}(x)} \mathbf{N}_{\eta}^{(1)}(h) \right] \mathbf{N}'_{\eta}(-h) \right\} \quad (46)$$

在圆柱面上满足纽曼条件的第二类电型并矢格林函数  $\bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  同样可由散射叠加方法获

得, 设  $\bar{G}_{e_2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  为

$$\begin{aligned} \bar{G}_{e_2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \bar{G}_{e_0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + \bar{G}_{2s}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \\ &= -\frac{1}{k^2} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta^2} \\ &= [\mathbf{M}_\eta(h) \mathbf{M}'_\eta(1)(-h) + \mathbf{N}_\eta(h) \mathbf{N}'_\eta(1)(-h)] + \\ &= \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_0)}{\eta^2} \\ &= [a_\eta \mathbf{M}'_\eta(1)(h) \mathbf{M}'_\eta(1)(-h) + b_\eta \mathbf{N}'_\eta(1)(h) \mathbf{N}'_\eta(1)(-h)] \end{aligned} \quad (47)$$

第二类电型并矢格林函数满足并矢纽曼条件:

$$\mathbf{e}_r \times [\nabla \times \bar{G}_{e_2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')]_{r=a} = 0 \quad (48)$$

将式(47)代入式(48), 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \left[ -\frac{1}{k^2} \nabla \times \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta^2} \right. \\ \left. \nabla \times [\mathbf{M}_\eta(h) \mathbf{M}'_\eta(1)(-h) + \mathbf{N}_\eta(h) \mathbf{N}'_\eta(1)(-h)] + \right. \\ \left. \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_0)}{\eta^2} \nabla \times [a_\eta \mathbf{M}'_\eta(1)(h) \mathbf{M}'_\eta(1)(-h) + \right. \\ \left. b_\eta \mathbf{N}'_\eta(1)(h) \mathbf{N}'_\eta(1)(-h)] \right]_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

式(49)等效于以下两个方程:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r \times [\mathbf{N}_\eta(h) + a_\eta \mathbf{N}'_\eta(1)(h)]_{r=a} = 0 \\ \mathbf{e}_r \times [\mathbf{M}_\eta(h) + b_\eta \mathbf{M}'_\eta(1)(h)]_{r=a} = 0 \end{cases} \quad (50)$$

对式(50)中两方程分别求解, 将  $\mathbf{N}_\eta(h)$ 、 $\mathbf{N}'_\eta(1)(h)$  关系代入式(50)中第一式得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \left[ \frac{1}{\kappa_\eta} \left[ -ih \frac{\partial J_n(\eta r)}{\partial r} \cos n\varphi \mathbf{e}_r \pm \right. \right. \\ \left. \frac{ihn J_n(\eta r)}{r} \frac{\sin n\varphi \mathbf{e}_\varphi + \eta^2 J_n(\eta r)}{\cos n\varphi \mathbf{e}_z} \right] e^{-ihz} + \\ \left. a_\eta \frac{1}{\kappa_\eta} \left[ -ih \frac{\partial H_n^{(1)}(\eta r)}{\partial r} \cos n\varphi \mathbf{e}_r \pm \frac{ihn H_n^{(1)}(\eta r)}{r} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sin n\varphi \mathbf{e}_\varphi + \eta^2 H_n^{(1)}(\eta r)}{\cos n\varphi \mathbf{e}_z} \right] e^{-ihz} \right]_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$$a_\eta = -\frac{J_n(x)}{H_n^{(1)}(x)} \quad x = \eta a \quad (52)$$

将  $\mathbf{M}_\eta(h)$ 、 $\mathbf{M}'_\eta(1)(h)$  关系代入式(50)中第二式得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \left[ \left[ \mp \frac{n J_n(\eta r)}{r} \frac{\sin n\varphi \mathbf{e}_r}{\cos n\varphi \mathbf{e}_\varphi} - \frac{\partial J_n(\eta r)}{\partial r} \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_\varphi}{\sin n\varphi \mathbf{e}_z} \right] e^{-ihz} + \right. \\ \left. b_\eta \left[ \mp \frac{n H_n^{(1)}(\eta r)}{r} \frac{\sin n\varphi \mathbf{e}_r}{\cos n\varphi \mathbf{e}_\varphi} - \frac{\partial H_n^{(1)}(\eta r)}{\partial r} \frac{\cos n\varphi \mathbf{e}_\varphi}{\sin n\varphi \mathbf{e}_z} \right] e^{-ihz} \right]_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$b_\eta = -\frac{J'_n(x)}{H'^{(1)}_n(x)} \quad x = \eta a \quad (54)$$

将解得的系数表达式(52)和(54)代入式(47)可求得无限长导体圆柱对应的第二类电型并矢格林函数为:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{e_2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= -\frac{1}{k^2} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \\ &= \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta^2} \cdot \\ &= \left\{ \left[ \mathbf{M}_\eta(h) - \frac{J_n(x)}{H_n^{(1)}(x)} \mathbf{M}'_\eta(1)(h) \right] \mathbf{M}'_\eta(1)(-h) + \right. \\ &= \left[ \mathbf{N}_\eta(h) - \frac{J'_n(x)}{H'^{(1)}_n(x)} \mathbf{N}'_\eta(1)(h) \right] \mathbf{N}'_\eta(1)(-h) \left. \right\} \\ &= x = \eta a \end{aligned} \quad (55)$$

## 4 结语

本研究基于圆柱坐标系的圆柱矢量波函数, 通过构建自由空间圆柱并矢格林函数, 推证出了导体圆柱空间的第一、二类电型并矢格林函数, 通过比较可以看出, 只需将展开式(37)中的系数  $a_\eta$ 、 $b_\eta$  交换位置, 便可得到  $\bar{G}_{e_2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  表达式。利用  $\bar{G}_{e_1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  和  $\bar{G}_{e_2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  之间的对称关系也可获得  $\bar{G}_{e_2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ , 文中不再赘述。文中推得的导体圆柱空间第一、二类电型并矢格林函数对研究介质覆盖导体圆柱边值问题以及导体圆柱外天线和导电圆柱面上口径天线远区辐射特性等问题具有理论指导意义。

## 参考文献:

- [1] 章日荣, 邸英杰, 李渠塘. 均匀柱波导内电磁场与并矢格林函数[J]. 无线电通信技术, 2000, 26(1): 23-25, 33.
- [2] 沈忠祥. 无辐射介质波导中的并矢格林函数[J]. 微波学报, 1992, 8(2): 37-41.
- [3] 刘继东, 张德锋, 朱震, 等. 圆柱导体电磁散射问题分析[J]. 电光与控制, 2007, 14(1): 144-146.

- [4] 朱震海, 张家宗, 洪伟, 等. 电大尺寸物体电磁辐射与散射特性几种分析方法的比较研究[J]. 电波科学学报, 1995, 10(Z1): 154-160, 32.
- [5] HANSEN W W. Directional characteristics of any antenna over a plane earth[J]. Journal of Applied Physics, 1936, 7(12): 460-465.
- [6] HANSEN W W. Transformations useful in certain antenna calculations[J]. Journal of Applied Physics, 1937, 8(4): 282-286.
- [7] JULIUS ADAMS STRATTON. Electromagnetic theory[M]. New York: McGraw-Hill, 1941: 349-387.
- [8] 戴振铎, 鲁述. 电磁理论中的并矢格林函数[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005: 108-136.
- [9] 宋文森. 规则边界下电磁场的本征函数和并矢格林函数[J]. 电子科学学刊, 1986, 8(3): 188-195.
- [10] LAKHTAKIA A, MACKAY T G. Dyadic green function for an electromagnetic medium inspired by general relativity[J]. Chinese Physics Letters, 2006, 23(4): 832-833.
- [11] 柯亨玉, 黄锡文. 并矢格林函数在圆柱坐标系中的本征展开及其在几何绕射理论中的应用[J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1991, 37(2): 41-52.
- [12] 雒向东, 张明, 海波, 等. 用磁型格林函数法构建平行板波导波函数和电场公式[J]. 贵州师范学院学报, 2021, 37(9): 1-5.
- [13] 朱敏. 柱形导波结构中场的并矢格林函数的构建[J]. 真空电子技术, 2004(1): 8-11.
- [14] 雒向东, 张明, 海波, 等. 几种格林函数方法的形成及其应用比较研究[J]. 太原师范学院学报(自然科学版), 2021, 20(3): 62-69.

(责任编辑: 方素华)

(上接第 514 页)

## 5 结语

设计了基于超声传感器和图像融合的智能小车, 实现障碍物的检测和避障功能。完成了智能小车结构方案设计和硬件选型、基于视觉和超声的障碍物检测和测距、智能小车装配和实验场景

的搭建, 该系统具有设计简洁、成本低廉、操作简单等特点。实验表明, 智能小车在不同场景中都能取得预期的避障实验结果, 验证了方法和结构方案的可行性, 为探索其他主动避障和智能辅助驾驶提供了一种思路。

## 参考文献:

- [1] 乔凌霄, 郭超维, 刘源涛, 等. 基于超声传感器的避障小车系统设计[J]. 运城学院学报, 2019, 37(3): 12-15.
- [2] 戴文翔, 孙智勇. 基于树莓派的红外避障小车[J]. 数字技术与应用, 2018, 36(1): 89-90.
- [3] 刘乐. 基于单线式激光雷达避障系统的设计[J]. 工业控制计算机, 2021, 34(7): 29-30.
- [4] 唐文响, 严华. 基于二维激光雷达的避障系统的设计与实现[J]. 计算机测量与控制, 2016, 24(10): 202-204, 208.
- [5] 朱建新, 罗刚, 汪志杰, 等. 基于激光雷达的挖掘机器人回转避障研究[J]. 传感器与微系统, 2017, 36(9): 41-44.
- [6] 郑颖霞. 基于视觉感知的智能巡检机器人全局避障路径规划[J]. 自动化应用, 2021(3): 167-168.
- [7] 李娟, 秦伟. 基于视觉的移动机器人避障控制系统设计[J]. 机床与液压, 2021, 49(15): 24-28.
- [8] 岳俊峰, 李秀梅. 基于机器视觉的智能小车自动循迹及避障系统[J]. 杭州师范大学学报(自然科学版), 2020, 19(2): 200-207.
- [9] LI D H, SHEN C, DAI X P, et al. Research on data fusion of adaptive weighted multi-source sensor[J]. Computers, Materials & Continua, 2019, 61(3): 1217-1231.
- [10] SHI G L, HE Y G, LI B, et al. Application of multi-sensor information fusion based on improved particle swarm optimization in unmanned system path planning[J]. International Journal of Online Engineering, 2017, 13(8): 88.
- [11] 王正家, 夏正乔, 孙楚杰, 等. 基于多传感器信息融合的自主跟随定位及避障方法[J]. 传感技术学报, 2019, 32(5): 723-727, 748.

(责任编辑: 陈雯)