doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2021.01.014

一类 Sobolev 空间紧嵌入定理

林振生

(1.福建工程学院 计算机科学与数学学院,福建 福州 350118;
2.福建师范大学 数学与信息学院,福建 福州 350117)

摘要: 利用 HÖlder 插值不等式论证了仅需 Sobolev 空间有界弱收敛子序列在某个 $L^p(\mathrm{R}^N)$ 空间上强收敛。借助更弱位势函数自身性质、有界区域上经典的 Sobolev 紧嵌入定理,巧妙地将全空间划分为 3 个特殊区间,证明了带有更弱位势函数的一类 Sobolev 空间紧嵌入定理。有效地解决了带有位势函数的椭圆偏微分方程解的存在性因工作空间失去紧性所产生的困难。

关键词: Sobolev 空间; 位势函数; HÖlder 不等式; 紧嵌入

中图分类号: O175.2　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-4348(2021)01-0081-03

Imbedding theorem for a kind of Sobolev space

LIN Zhensheng

(1.School of Computer Science and Mathematics, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China;
2.College of Mathematics and Informatics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China)

Abstract: The HÖlder interpolating inequality was used to prove that the Sobolev compact imbedding theorem holds if and only if the bounded sequence has some strong converge sequence for some $L^p(\mathrm{R}^N)$. By the properties of the weaker potential function, the compact imbedding theorem on the bound domain along with three special partitions of the entire space, the compact imbedding theorem was verified for some kind of Sobolev space with weaker potential function. And such a theorem could be useful for the study of the existence of a solution for some type of the elliptic equations which possess this kind of potential function when compactness for the functional space fails.

Keywords: Sobolev space; potential function; HÖlder inequality; compact imbedding

为纪念前苏联科学家 Sobolev,学者们将一类函数空间命名为 Sobolev 空间,它是寻找椭圆方程解存在性常用的基本工具[1]2,[2]1。有关 Sobolev 空间有大量的研究工作及应用场景[3-5]。郭玉霞等人[5]研究了带有某类深井位势的双调和方程极小能量解的存在性。Liu 等人[4]在更一般位势假设下,研究某类非线性 SchrÖdinger 方程解的存在性,提及一类比普通深井位势更弱的位势函数,工作空间具有一定的紧性嵌入性质。但未给出该结论的证明。这结论也出现在文献[6]引理 3.4,Zou[6]45 利用命题 1.13(有界区域上的 Sobolev 嵌入定理)及命题 1.16(Gagliardo-Nirenberg 不等式)给出这一紧嵌入定理的详细证明。而为能利用锥上的上同调环绕变分方法解决一类带有位势函数的 p-Laplace 方程非平凡解的存在性问题,Liu[3]给出更弱意义下的 Sobolev 空间紧嵌入定理。近十年来,带不同位势函数的 Sobloev 空间及其应用一直是学者们关注的问题,是否存在比文献[4-6]中位势函数更弱的位势函数? 如果存在,那么在研究 p-Laplace 方程非平

收稿日期: 2020-09-24
基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11871152);福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JT180326);校科研启动基金项目(GY-Z20090)
作者简介: 林振生(1983—), 男, 福建南安人, 讲师, 博士, 研究方向:非线性分析及其应用。

凡弱解存在性时,这类更弱位势函数的 Sobolev 空间是否也存在紧嵌入定理? 本文力图论证带更弱位势函数的一类 Sobolev 函数空间存在紧嵌入定理。

1 问题描述及主要结果

过去学者们常使用满足如下 (V_0) 、(V_1) 条件的位势函数 $V(x)$:

(V_0) $V(x) \in C(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$,且 $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^N} V(x) > 0$;

(V_1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$。

在深井位势函数环境下, 郭玉霞等[5]人研究了带深井位势的双调和方程极小能量解的存在性。而在文献[7]中, Bartsch 等人也在 (V_0)、(V_1') 假设下,研究下列非线性 SchrÖdinger 方程解的存在性

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u) \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

其中, (V_1') 对于任意的 $b \in \mathbf{R}, m(\{x \mid V(x) \leqslant b\}) < +\infty$

文中用到紧嵌入定理: $H_V \to\to L^t(\mathbf{R}^N)$,对于任意的 $2 \leqslant t < 2^*$ 均成立,工作空间为带位势函数的 Hilbert 空间 $H_V = \{u \in H^1(\mathbf{R}^N,\mathbf{R}): \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)\mathrm{d}x < \infty\}$,范数为: $\|u\|_{H_V} = \left(\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$。引理 3.4[6]45给出该紧嵌入定理详细证明。而 $V(x)$ 在满足 (V_0), (V_1') 条件下, Liu[3] 给出更弱意义下的另一类 Sobolev 空间紧嵌入定理。在此基础上,利用锥上的上同调环绕变分方法获得了如下 p-Laplace 方程非平凡解的存在性。

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u - \lambda|u|^{p-2}u = f(x,u) \\ u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N,\mathbf{R}) \end{cases} \tag{2}$$

Bartsch 等在文献[8]中提出一类带有 (V_2) 条件的位势函数:

(V_2) 存在 $r > 0$, 使得对于任意的 $b > 0$, $\lim\limits_{|y|\to\infty} m(\{x \mid V(x) \leqslant b\} \cap B_r(y)) = 0$; 其中, $B_r(y) := \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x-y| < r\}$。

而 Liu 等在文献[4]第三节中研究一类带有 (V_2) 条件的位势函数的非线性 SchrÖdinger 方程解的存在性,但未给出紧嵌入定理的证明。以下给定两个条件记号 (V_1'')、(V_2'):

(V_1'') 对于任意的 $b \in \mathbf{R}$, $\{x \mid V(x) \leqslant b\}$ 是有界的;

(V_2') 记 $\varepsilon_{R_0} := \sup\limits_{|y|\geqslant R_0} \mathrm{m}(A_b(y))$, $\lim\limits_{R_0\to\infty} \varepsilon_{R_0} = 0$; 其中, $A_b(y) := \{x \mid V(x) \leqslant b\} \cap B_r(y)$。

可得:条件 (V_1) 与 (V_1'') 等价;条件 (V_2) 和 (V_2') 也等价; 条件 (V_1') 比 (V_1'') 更弱; 条件 (V_2') 比 (V_1') 更弱。

考虑 Sobolev 空间 $X = \{u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N,\mathbf{R}): \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^p + V(x)|u|^p)\mathrm{d}x < \infty\}$,其范数为:

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^p + V(x)|u|^p)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}。$$

假设位势函数 $V(x)$ 满足 (V_0) 、(V_2) 两个条件,论证带有这类更弱位势函数的一类 Sobolev 空间存在紧嵌入定理。

定理 1.1 假设 (V_0) 、(V_2) 成立,那么, $X \to\to L^t(\mathbf{R}^N)$,对于一切的 $2 \leqslant p \leqslant t < p^*$ 均成立。

由于 (V_0) 条件的假设及 X 空间的定义,借鉴文献[9]附录 A,可知 X 是一个自反、可分的 Banach 空间。同时,存在连续嵌入结论: $X \to L^t(\mathbf{R}^N)$,对于一切的 $2 \leqslant p \leqslant t < p^*$ 均成立。由定理 1.1 及条件 (V_1) 、(V_1') 、(V_2) 强弱关系,可获得两个注记。

注记 1.1 假设 (V_0) 、(V_1') 成立,那么, $X \to\to L^t(\mathbf{R}^N)$,对于一切的 $2 \leqslant p \leqslant t < p^*$ 均成立。

注记 1.2 假设 (V_0) 、(V_1) 成立,那么, $X \to\to L^t(\mathbf{R}^N)$,对于一切的 $2 \leqslant p \leqslant t < p^*$ 均成立。

注记 1.1 是文献[3]引理 2.1,由于定理 1.1 中 $V(x)$ 条件更弱,因此它是更一般的结论。除此之外,定理 1.1 允许 $p \geqslant 2$ 且 $V(x)$ 条件也更弱,推广了引理 3.4[6]45,这正是注记 1.2。同时发现,存在满足 (V_1) 条件却不满足 (V_2) 条件的函数,如: $V(x) = |x|^2, V(x) = C + |x|^2$, 其中 C 是一个正的常数。而由于定理 1.1 条件更弱,且不仅仅包含 $p = 2$ 的情形,还包含 $p > 2$,面临新的困难,需要新的处理技巧及新的工具。

除特别说明外, $C_i (i \in \mathbf{N})$ 表示不同的常数。描述空间两者关系时, $\to$ 表示连续嵌入; $\to\to$ 表示连续紧嵌入; $\rightharpoonup$ 表示弱收敛; $\mathbf{N}$ 表示全体自

然数组成的集合；$\mathbf{R}$ 表示全体实数组成的集合；$\mathbf{R}^N$ 表示 N 维欧几里得空间；$|\cdot|_p$ 表示 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 的标准范数。

2　基本引理

给出两个准备引理，分别是插值不等式（HÖlder 不等式）及有界区域上的紧嵌入定理（Rellich-Kondrachov 定理）：

引理 2.1[2]27 假设 $1 \leqslant r < p < s \leqslant +\infty$，使得 $\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{r} + \frac{1-\lambda}{s}$，对于 $0 < \lambda < 1$ 均成立。如果 $f \in L^r(\mathbf{R}^N) \cap L^s(\mathbf{R}^N)$，那么，$f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ 且

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_r^{\lambda} \|f\|_s^{1-\lambda} \tag{3}$$

引理 2.2[2]170,[6]4 假设 $1 < p < \mathbf{N}$，Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中一有界区域。那么，$W^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}) \rightarrow\rightarrow L^q(\Omega)$，对于一切的 $1 \leqslant q < p^*\ (p^* := \frac{Np}{N-p})$ 均成立。

3　主要定理证明

定理 1.1 的证明。

假设 $\{u_n\}$ 是 X 中一有界序列，$u_n \rightharpoonup u$ 在 X 中成立，则 $u_n \rightarrow u$ 在 $L^t(\mathbf{R}^N)$，对一切的 $2 \leqslant p \leqslant t < p^*$ 均成立。当且仅当证明：如果 X 中的有界序列 $\{u_n\}$，满足 $u_n \rightharpoonup u$ 在 X 中成立，则 $u_n \rightarrow u$ 在 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 中成立。

如果 $u_n \rightarrow u$，存在一个正数 $\theta \in (0,1)$，使得 $\frac{1}{t} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$，那么由引理 2.1 推得：

$$\|v_n\|_t^t = \int_{\mathbf{R}^N} |v_n|^{\theta t} |v_n|^{(1-\theta)t} dx \leqslant |v_n|_p^{\theta t} |v_n|_{p^*}^{(1-\theta)t}$$

其中，$v_n := u_n - u$。由于 $\{v_n\}$ 是 $L^{p^*}(\mathbf{R}^N)$ 中有界序列，而 $v_n \rightarrow 0$ 在 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 中成立，推得 $v_n \rightarrow 0$ 在 $L^t(\mathbf{R}^N)$ 中成立。也就是说对于一切的 $2 \leqslant p \leqslant t < p^*$，$u_n \rightarrow u$ 在 $L^t(\mathbf{R}^N)$ 中均成立。

以下证明：$u_n \rightarrow u$ 在 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 成立。

取 $\{y_i\} \subseteq \mathbf{R}^N$，$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_r(y_i) \supseteq \mathbf{R}^N$，$R_0 > 2r > 0$，记 $v_n := u_n - u$，由 HÖlder 不等式，推得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{R_0}^c} |v_n|^p dx \leqslant \sum_{|y_i| \geqslant R_0 - r} \int_{B_r(y_i)} |v_n|^p dx \leqslant \\
&\sum_{|y_i| \geqslant R_0-r} \left(\int_{B_r(y_i)} |v_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{N-p}{N}} \left(\int_{B_r(y_i)} 1^{\frac{N}{p}} dx\right)^{\frac{p}{N}} = \\
&|B_r(y_i)|^{\frac{p}{N}} \sum_{|y_i| \geqslant R_0-r} \left(\int_{B_r(y_i)} |v_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{N-p}{N}}
\end{aligned} \tag{4}$$

再由引理 2.2，有 $W^{1,p}(B_{R_0}) \rightarrow L^{p^*}(B_{R_0})$。于是，存在一个正数 C_1，使得对于 $u \in W^{1,p}(B_{R_0})$，有

$$|u|_{L^{p^*}(B_{R_0})} \leqslant C_1 \|u\|_{W^{1,p}(B_{R_0})}$$

联立这个连续嵌入不等式以及式子（4）及 $\{v_n\}$ 有界性，可推得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{R_0}^c} |v_n|^p dx \leqslant \\
&|B_r(y_i)|^{\frac{p}{N}} C_2 \sum_{|y_i| \geqslant R_0-r} \left(\|v_n\|_{W^{1,p}(B_r(y_i))}^p\right) \leqslant \\
&|B_r(y_i)|^{\frac{p}{N}} C_2 2^N \int_{B_{R_0-2r}^c} (|\nabla v_n|^p + V(x)|v_n|^p) dx \leqslant \\
&|B_r(y_i)|^{\frac{p}{N}} C_3 \int_{B_{R_0-2r}^c} (|\nabla v_n|^p + V(x)|v_n|^p) dx \leqslant C_4
\end{aligned} \tag{5}$$

除此之外，还有

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{R_0}^c \cap \{x | V(x) \leqslant b\}} |v_n|^p dx \leqslant \\
&\sum_{|y_i| \geqslant R_0-r} \left(\int_{B_r(y_i) \cap \{x | V(x) \leqslant b\}} |v_n|^p dx\right) \leqslant \\
&\sum_{|y_i| \geqslant R_0-r} \left(\int_{A_b(y_i)} |v_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{N-p}{N}} \left(\int_{A_b(y_i)} 1^{\frac{N}{p}} dx\right)^{\frac{p}{N}} \leqslant \\
&\epsilon_{R_0-r}^{\frac{p}{N}} \sum_{|y_i| \geqslant R_0-r} \left(\int_{B_r(y_i)} |v_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{N-p}{N}} \leqslant \\
&C_5 \epsilon_{R_0-r}^{\frac{p}{N}} 2^N \int_{B_{R_0-2r}^c} (|\nabla v_n|^p + V(x)|v_n|^p) dx \leqslant \\
&C_6 \epsilon_{R_0-r}^{\frac{p}{N}} \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla v_n|^p + V(x)|v_n|^p) dx \leqslant C_7 \epsilon_{R_0-r}^{\frac{p}{N}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

因为 (V_0)、(V_2) 成立，$\{v_n\}$ 是 X 中的有界序列。因此，结合式(5)和(6)，对于任意 $\epsilon > 0$，容易推得以下结果

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N} |v_n|^p dx \leqslant \int_{B_{R_0}} |v_n|^p dx + \\
&\int_{B_{R_0}^c \cap \{x | V(x) \leqslant b\}} |v_n|^p dx + \int_{B_{R_0}^c \cap \{x | V(x) > b\}} |v_n|^p dx \leqslant \\
&\int_{B_{R_0}} |v_n|^p dx + C_7 \epsilon_{R_0-r}^{\frac{p}{N}} + \int_{B_{R_0}^c} \frac{V(x)|v_n|^p}{b} dx \leqslant \\
&\int_{B_{R_0}} |v_n|^p dx + C_7 \epsilon_{R_0-r}^{\frac{p}{N}} + \frac{\|v_n\|^p}{b} \leqslant \\
&\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

对于足够大的 b、R_0 成立。

故，$u_n \rightarrow u$ 在 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 中成立，证毕。

（下转第 88 页）