doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2020.01.016

不含 H 子图的图上的最大割下界

林晶[1,2]

(1. 福建工程学院 数理学院, 福建 福州 350118;
2. 福州大学 离散数学研究中心, 福建 福州 350116)

摘要: 文章证明了对于由单个顶点连接任意 t 个点不交的完全二部图 $K_{2,s}$ 的所有顶点构成的图 H,有 $f(m,H) \geqslant \frac{m}{2} + \Omega(m^{(2t+1)/(3t+1)})$;特别当 $t = 1$ 时,该猜想近似成立。还证明了对于轮图 W_{2k},有 $f(m,W_{2k}) \geqslant \frac{m}{2} + \Omega(m^{(2k+2)/(3k+2)})$。

关键词: 最大割; 不含 H 子图; 下界
中图分类号: O157.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1672-4348(2020)01-0087-05

Lower bounds on maximum cuts in H-free graphs

LIN Jing[1,2]
(1. Mathematics and Physics Institute, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China;
2. Center for Discrete Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China)

Abstract: This paper shows that, for any graph H obtained by connecting a single vertex to all vertices of the union of t vertex-disjoint $K_{2,s}$, $f(m,H) \geqslant \frac{m}{2} + \Omega(m^{(2t+1)/(3t+1)})$. In particular, the conjecture is confirmed asymptotically for $t = 1$. It is also proved that for any wheel graph W_{2k}, $f(m,W_{2k}) \geqslant \frac{m}{2} + \Omega(m^{(2k+2)/(3k+2)})$.

Keywords: maximum cut; H-free graphs; lower bound

给定一个图 G,令 $f(G)$ 表示 G 的二部子图包含的最大边数。给定一个正整数 m,令 $f(m)$ 表示所有具有 m 条边的图 G 的 $f(G)$ 的最小值。经典的最大割问题旨在寻找 $f(m)$ 的值,该问题有非常广泛的应用价值,被应用于复杂网络社团结构分析、大规模集成电路设计(VLSI),同时也在统计物理学中用来研究处理自旋玻璃(Spin glass)状态的重要模型之一。

考虑对一个有 m 条边的图的顶点进行随机划分,容易证得 $f(m)$ 至少是 $m/2$。Edwards[1] 证明了对任何一个有 m 条边的图,$f(m)$ 至少是 $m/2 + (\sqrt{8m+1} - 1)/8$,并且该下界是紧的,极图是具有奇数个顶点的完全图。参考文献[2-6]有关于 $f(m)$ 的更多研究进展。给定一个图 H,令 $f(m,H)$ 表示所有有 m 条边且不含 H 作为子图的图 G 的 $f(G)$ 的最小值。确定 $f(m,H)$ 的值是图划分问题中的一个重要研究课题。著名数学家 Alon, Bollobás, Krivelevich 和 Sudakov[7] 提出了下面猜想:

猜想 0.1[7]. 对于任意给定的图 H,存在常数 $\varepsilon(H) > 0$,使得 $f(m,H) \geqslant m/2 + \Omega(m^{3/4+\varepsilon})$。

提高猜想 0.1 中下界的误差项非常困难,即使相对简单的图 H。到目前为止,引起国内外学者最广泛研究的情况是 $H = K_3$。在诸多研究[8-10]

收稿日期: 2019-08-02;修回日期: 2019-12-19
基金项目: 福建省教育科学“十三五规划”重点课题(FJJKCGZ19-245);福建工程学院科研发展基金资助(GY-Z15086)
作者简介: 林晶(1985-),女,福建福州人,讲师,博士研究生,研究方向:图论及其应用。

之后，Alon[2] 证明了对所有的 m，$f(m,K_3)$ 至少是 $m/2+\Omega(m^{4/5})$，且这个下界是紧的。Alon，Krivelevich 和 Sudakov[11] 进一步延伸了该结论：令 H 由单个顶点连接某一棵非平凡树的所有顶点构成的图，存在一个常数 $c=c(H)>0$，使得对所有的 m，均有 $f(m,H)$ 至少是 $m/2+cm^{4/5}$，且这个界是紧的。最近，Zeng 和 Hou 对 H 是完全图的情形[12] 和 H 是奇圈的情形[13] 分别给出了相应的下界。

森林是不含圈的图，想进一步研究当 H 是由单个顶点连接某个含圈图的所有顶点构成的图时，$f(m,H)$ 的下界情况。在含圈图中，最典型的就是圈或完全二部图 $K_{2,s}$。因此，本文将考虑猜想 0.1，当 H 是一个偶轮或者 H 是单个顶点连接任意多个不交的 $K_{2,s}$ 的所有顶点构成的图。无特别说明，本文中的图均为有限无向简单图，所有的对数均以 e 为底。设 G 和 H 是两个不交的图，将 G 和 H 的不交记作 $G\cup H$。

1 单点连接 $\bigcup\limits_{i=1}^{t} K_{2,s_i}$ 的情形

定理 1.1 令 $t\geqslant 1$ 是一个正整数，令 H 由单个顶点连接图 $\bigcup\limits_{i=1}^{t} K_{2,s_i}$ 的所有顶点构成的图。对于每一个 $s_i\geqslant 2$，都存在一个常数 $c=c(s_1,s_2,\cdots,s_t)>0$，使得对所有的 m，均有

$$f(m,H)\geqslant \frac{m}{2}+cm^{(2t+1)/(3t+1)}。$$

延续文献[2,7,11]中的讨论，并附加一些新的思想，需要用到一些已知的结论。首先，介绍下述引理，它在证明中起到至关重要的作用，揭示了一个染色数“较小”的图必包含一个“较大”的二部子图。详细证明可参考文献[2,7,11,14]。

引理 1.2 设 G 是一个有 m 条边且染色数至多为 χ 的图，那么 $f(G)\geqslant \dfrac{\chi+1}{2\chi}m$。

下面的 3 个引理，分别用不同的参数给出了图 G 的 $f(G)$ 的不同下界。

引理 1.3[15] 设 G 是一个有 n 个顶点且最小度大于 0 的图，那么 $f(G)\geqslant \dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{6}$。

引理 1.4[2] 设 $G=(V,E)$ 是一个有 m 条边的图。设 $U\subset V$，G' 由 G 中顶点集 U 导出的子图。如果 G' 有 m' 条边，那么 $f(G)\geqslant f(G')+\dfrac{m-m'}{2}$。

引理 1.5[11] 存在两个确定的常数 ε，$\delta\in(0,1)$ 满足以下性质：设 G 是一个有 n 个顶点、m 条边且度序列为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的图，假设对每一个度为 d_i 的顶点，它的 d_i 个邻居的导出子图包含至多 $\varepsilon d_i^{3/2}$ 条边，那么 $f(G)\geqslant \dfrac{m}{2}+\delta\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{d_i}$。

其次，介绍一个不含单边最大度大等于 2 的二部图的图的边数上界。

引理 1.6[16] 令 H 是一个二部图且它的其中一部分顶点的最大度为 $\Delta'\geqslant 2$。若 G 是一个有 n 个顶点且不含 H 的图，那么存在一个常数 $b=b(H)>0$，使得 $e(G)\leqslant bn^{1-1/\Delta'}$。

最后，介绍一个引理，它阐述了对于具有相对大的最小度且每个顶点的邻居导出子图较稀疏的图来说，必存在某个满足指定条件的随机导出子图。

引理 1.7[12] 设 $G=(V,E)$ 是一个有 n 个顶点、m 条边且最小度为 m^{α} 的图，其中 $\alpha\in(0,1)$ 是一个固定的实数。假设 m 充分大，且存在某个常数 $s>0$，使得任意一个度为 d 的顶点 $v\in V$，v 的邻居的导出子图至多包含 $sd^{3/2}$ 条边。那么，对每一个常数 $\eta\in(0,1)$，都存在一个 G 的导出子图 $G'=(V',E')$，满足以下性质：

- G' 至少包含 $\dfrac{\eta m}{2}$ 条边；
- V' 中任意一个在 G 中度为 d 的顶点 v，v 在 G' 中的度至少是 $\dfrac{\eta d}{2}$；
- V' 中任意一个在 G 中度为 d 的顶点 v，v 的邻居在 G' 中的导出子图至多有 $2\eta^2 sd^{3/2}$ 条边。

定理 1.1 的证明 假设 $t\geqslant 1$ 是一个给定的实数，H 是由单个顶点连接 $\bigcup\limits_{i=1}^{t} K_{2,s_i}$ 的所有顶点构成的图。假设每一个 $s_i\geqslant 2$。设 $G=(V,E)$ 是一个有 n 个顶点、m 条边且不含 H 子图的图。在下述证明中，假设 m 充分大。定义 $q=m^{2t/(3t+1)}$，根据 G 是否存在稠密子图，分两种情况进行讨论。

情况 1 假设 G 中存在一个阶为 N 的顶点集 U，使得 U 的导出子图 $G'=G[U]$ 的最小度至少为 q。显然，$e(G')\geqslant qN/2$。定义

$$r=2\left[\left(\frac{N}{\theta q}\right)2t\right]$$

其中，$\theta=\theta(t)\in(0,1)$ 是一个系数，它的值将在后面证明中给出。首先证明存在 $U'\subset U$ 使得 G'

有一个 U' 的导出子图 $G''=G[U']$，G'' 至少包含 $qN/4$ 条边且 G'' 是 $O(r)$-可染的。为得到这个结论，从 U 中均匀地随机选取 $2t$ 个顶点，有放回地独立重复取 r 次，于是得到 r 个随机顶点集，记为 $X_1,X_2,\cdots,X_r$。假设 $X_i=\{x_1(i),x_2(i),\cdots,x_{2t}(i)\}$，$1\leqslant i\leqslant r$，令 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_r\}$，则显然有 $|X|\leqslant r$。构造随机顶点集 U'，将 U 中任意一个顶点 u 放入 U'，当且仅当存在某个 $X_i\in X$，使得 $\{ux_1(i),ux_2(i),\cdots,ux_{2t}(i)\}\subseteq E(G')$。从而得到 G' 的一个导出子图 $G''=G[U']$。

令 u 是 U 中一个固定的顶点，$X_i\in X$ 是 U 中的一个随机顶点集。事件 $ux_1(i),ux_2(i),\cdots,ux_{2t}(i)$ 都是 G' 中的边的概率为 $\dfrac{(d_{G'}(u)2t)}{(N2t)}$，其中 $d_{G'}(u)$ 表示 u 在 G' 中的度。由 r 的定义可知，事件不存在一个 $X_i\in X$ 使得 u 是 X_i 中所有顶点公共邻居的概率，至多是

$$\left(1-\frac{\binom{d_{G'}(u)}{2t}}{\binom{N}{2t}}\right)^r\leqslant$$

$$\exp\left\{-r\cdot\frac{d_{G'}(u)(d_{G'}(u)-1)\cdots(d_{G'}(u)-2t+1)}{N(N-1)\cdots(N-2t+1)}\right\}\leqslant$$

$$\exp\left\{-2\left(\frac{N}{\theta q}\right)2t\cdot\frac{q(q-1)\cdots(q-2t+1)}{N(N-1)\cdots(N-2t+1)}\right\}\leqslant$$

$$e^{-2}<\frac{1}{4},$$

其中，选择适当的值 $\theta=\theta(t)$ 使得 $q-2t+1\geqslant\theta q$，即可保证第 3 个不等式成立。因此，$P(u\in U')\geqslant\dfrac{3}{4}$。那么，对 G' 中任意一条给定的边 uv，均有

$$P(uv\in E(G''))=P(u\in U')+P(v\in U')-P(u\in U'\text{或者}v\in U')>\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1>\frac{1}{2}。$$

由于 $e(G')\geqslant qN/2$ 且期望具有线性可加性，结合上式，得到

$$E(e(G''))=\sum_{uv\in E(G'')}P(uv\in E(G''))\geqslant\frac{1}{2}e(G'')\geqslant\frac{1}{4}qN,$$

即 G' 中存在子图 G'' 至少包含 $qN/4$ 条边。

固定上述的集合 X 和 U'，对任意 $X_i\in X$，令 G_i 是 X_i 中所有顶点的公共邻居在 G' 中导出的子图，令 $l=2\left(\sum_{i=1}^{t}s_i+1\right)$，则对每一个 $1\leqslant i\leqslant r$，均有 G_i 是 l-可染的。若不然，假设对任意的 $1\leqslant i\leqslant r$，G_i 是一个有 n_i 个顶点且染色数 $\chi(G_i)>l$ 的图。不失一般性，假设 G_i 是点临界的，那么 G_i 的最小度至少为 $\chi(G_i)-1$。由于 G 中不含 H 作为子图，则每一个 G_i 中不含星图 $K_{1,l/2-1}$，故 G_i 的边数至多是 $\dfrac{1}{2}ln_i$。故 $ln_i\geqslant2e(G_i)\geqslant(\chi(G_i)-1)n_i\geqslant ln_i$ 矛盾，G_i 是 l-可染的。又由于 $|X|\leqslant r$，则 G'' 至多是 lr-可染的。

综上，找到一个随机顶点集 X，$|X|\leqslant r$，由 X 对应了一个子图 $G''\subseteq G$ 至少包含 $qN/4$ 条边且是 $O(r)$-可染的。下面，证明 $f(G)$ 的下界。若 $N\geqslant m^{(2t+1)/(3t+1)}$，那么由引理 1.3，

$$f(G)\geqslant\frac{m}{2}+\frac{n}{6}\geqslant\frac{m}{2}+\frac{N}{6}\geqslant\frac{m}{2}+\frac{1}{6}m^{(2t+1)/(3t+1)}。$$

否则，若 $N<m^{(2t+1)/(3t+1)}$，则由引理 1.2、$e(G'')\leqslant\dfrac{qN}{4}$ 和 $\chi(G'')\leqslant lr$，有

$$f(G'')\geqslant\frac{e(G'')}{2}+\frac{e(G'')}{2lr}\geqslant\frac{e(G'')}{2}+\frac{qN}{16l}\cdot\left[\left(\frac{N}{\theta q}\right)2t\right]-1\geqslant\frac{e(G'')}{2}+\frac{\theta^{2t}}{16l}\cdot\frac{q^{2t+1}}{N^{2t-1}}。$$

上式结合引理 1.4 以及 q 的定义，得到

$$f(G)\geqslant f(G'')+\frac{m-e(G'')}{2}\geqslant\frac{m}{2}+\frac{\theta^{2t}}{16l}\cdot\frac{q^{2t+1}}{N^{2t-1}}\geqslant\frac{m}{2}+\frac{\theta^{2t}}{16l}\cdot m^{(2t+1)/(3t+1)}。$$

情况 2　G 中不含有最小度至少是 q 的子图。称 G 是 q-退化的。若 $n\geqslant\dfrac{1}{2}m^{(2t+1)/(3t+1)}$，由引理 1.3，结论自然成立。故假设 $n<\dfrac{1}{2}m^{(2t+1)/(3t+1)}$，利用引理 1.5 来证明结论，证明 G 中存在一个导出子图 G' 满足引理 1.5 的条件。

只要 G 中存在度小于 $m^{t/(3t+1)}$ 的顶点，将它删除。由于 $n<\dfrac{1}{2}m^{(2t+1)/(3t+1)}$，所以在删除了这些顶点之后，$G$ 中至多被删除了 $m^{t/(3t+1)}n<m/2$ 条边。将删除这些点后得到的导出子图记为 $G^*=(V^*,E^*)$，$G^*\subseteq G$，G^* 中至少包含 $m/2$ 条边且

G^* 的最小度至少是 $m^{t/(3t+1)}$ 。G^* 也是不含 H 子图的,容易得知,任意一个在 G^* 中度为 d 的顶点,它在 G^* 中的邻居的导出子图(也是 G^* 的子图)不含 $\bigcup_{i=1}^{t} K_{2,s_i}$ 。$\bigcup_{i=1}^{t} K_{2,s_i}$ 是一个二部图,且单边最大度 $\Delta' = 2$,由引理 1.6,该导出子图的边数不超过 $bd^{3/2}$ 。令 $\eta < \frac{\varepsilon^2}{32b^2}$,在 G^* 上应用引理 1.7,可得到一个 G^* 的导出子图 $G' = (V', E')$ 满足引理 1.5 的条件,即 G 中存在一个边数至少为 $\eta^2 m/4$ 的子图 G' ,且任意一个在 G' 中度为 d' 的顶点,其邻居的导出子图的边数不超过 $\varepsilon(d')3/2$ 。

由于 G' 也是 q -退化的,故可以将 G' 的顶点进行标号,记为 $v_1, v_2, \cdots, v_{n'}$,再记 d_i^+ 表示 v_i 在 G' 中下标 $j < i$ 的邻居 v_j 的个数。那么,由退化的定义,易证得 $d_i^+ \leqslant q$ [2,7,11],且显然 $\sum_{i=1}^{n'} d_i^+ = e(G')$ 。记 d_i 表示 v_i 在 G' 中的度,由引理 1.5,有

$$f(G') \geqslant \frac{e(G')}{2} + \delta \sum_{i=1}^{n'} \sqrt{d_i} \geqslant$$

$$\frac{e(G')}{2} + \delta \sum_{i=1}^{n'} \sqrt{d_i^+} \geqslant \frac{e(G')}{2} + \frac{\delta \sum_{i=1}^{n'} \sqrt{d_i^+}}{\sqrt{q}} \geqslant$$

$$\frac{e(G')}{2} + \frac{\delta\eta^2}{4} m^{(2t+1)/(3t+1)} ,$$

其中,$\delta = \delta(G')$ 是视需要而取定的常数。上述不等式结合引理 1.4,可以得到

$$f(G) \geqslant f(G') + \frac{m - e(G')}{2} \geqslant$$

$$\frac{m}{2} + \frac{\delta\eta^2}{4} m^{(2t+1)/(3t+1)} 。$$

令 $c = \min\left\{\frac{\theta^{2t}}{16l}, \frac{\delta\eta^2}{4}\right\}$,结合情况 1 和 2 可知,定理 1.1 得证。

由定理 1.1,可推出下述结论:

推论 1.2 令 H 由单个顶点连接 $K_{2,s}$ 的所有顶点构成的图。那么存在一个常数 $c(s) > 0$,使得对所有的 m ,有 $f(m, H) \geqslant \frac{m}{2} + c(s) m^{3/4}$ 。

2 偶轮的情形

定理 2.1 令 $k \geqslant 2$ 是一个正整数,W_{2k} 表示由单个顶点连接圈 C_{2k} 的所有顶点构成的轮图。那么存在一个常数 $c(k) > 0$,使得对所有的 m ,均有

$$f(m, W_{2k}) \geqslant \frac{m}{2} + c(k) m^{(2k+2)/(3k+2)} 。$$

定理 2.1 的证明方法与上一节定理 1.1 的证明方法类似。介绍一个不含特定偶圈的图的边数上界。

引理 2.2[17] 假设 $k \geqslant 2$ 是一个整数,假设 G 是一个有 n 个顶点且不含长度为 $2k$ 的圈的图,那么 G 中至多有 $100kn^{1+1/k}$ 条边。

定理 2.1 的证明 假设 $k \geqslant 2$ 是一个给定的实数,假设 $G = (V, E)$ 是一个有 n 个顶点、m 条边且不含 W_{2k} 的图。因为 $C_4 = K_{2,2}$,所以由推论 1.2 可知,$k = 2$ 时结论成立。因此下面假设 $k > 2$。定义 $q = m^{2k/(3k+2)}$,类似定理 1.1 的证明,根据 G 是否存在稠密子图,分两种情况进行讨论。

情况 1 假设 G 中存在一个阶为 N 的顶点集 U ,使得 U 的导出子图 $G' = G[U]$ 的最小度至少为 q 。定义 $r = \left\lceil \frac{2N^k}{(\theta q)^k} \right\rceil$,其中 $\theta = \theta(k)$ 是一个很小的正系数,它的值将在后面给出。类似地,先证明存在 $U' \subset U$,使得 G' 有一个导出子图 $G'' = G[U']$ 至少包含 $qN/4$ 条边且 G'' 是 $2(k+1)r$ -可染的。

从 U 中均匀地随机取 k 个顶点,有放回地独立重复取 r 次,于是得到 r 个随机顶点集,记为 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 。记 $X_i = \{x_1(i), x_2(i), \cdots, x_k(i)\}$,$X = \{X_1, X_2, \cdots, X_r\}$ 。构造顶点集 U' 如下:将 U 中任意一个顶点 u 放入 U' 中,当且仅当存在某个 $X_i \in X$,使得 $\{ux_1(i), ux_2(i), \cdots, ux_k(i)\} \subseteq E(G')$ 。令 $G'' = G[U']$ 。那么对 U 中的一个固定顶点 u ,事件不存在一个 $X_i \in X$ 使得 $\{ux_1(i), ux_2(i), \cdots, ux_k(i)\} \subseteq E(G')$ 的概率至多是

$$\left(1 - \frac{\binom{d_{G'}(u)}{k}}{\binom{N}{k}}\right)^r \leqslant$$

$$\exp\left\{-2\left(\frac{N}{\theta q}\right)^k \cdot \frac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)}\right\} \leqslant$$

$$e^{-2} < \frac{1}{4} ,$$

其中,系数 $\theta < \frac{q-k+1}{q}$ 。类似定理 1.1 证明中

的讨论，具体证明过程在此略去，可以得到，存在一个阶至多为 r 的顶点集 X，其对应的子图 G'' 至少包含 $qN/4$ 条边。

固定上述的集合 X 和 U'，对任意 $X_i \in X$，令 G_i 是 X_i 中所有顶点的公共邻居在 G' 中导出的子图。因为 G 中不含 W_{2k}，故每一个 G_i 中不含 $K_{1,k}$，从而 G_i 是 $2(k+1)$-可染的，所以 G'' 是 $2(k+1)r$-可染的。

若 $N < m^{(2k+2)/(3k+2)}$，由引理 1.2 和 1.4 得

$$f(G) \geqslant f(G'') + \frac{m - e(G'')}{2} \geqslant$$

$$\frac{m}{2} + \frac{e(G'')}{2(k+1)r} \geqslant$$

$$\frac{m}{2} + \frac{qN}{16(k+1)} \cdot \left[\left(\frac{N}{\theta q}\right)^k\right] - 1 \geqslant$$

$$\frac{m}{2} + \frac{\theta^k}{16(k+1)} \cdot \frac{q^{k+1}}{N^{k-1}} \geqslant$$

$$\frac{m}{2} + \frac{\theta^k}{16(k+1)} m^{(2k+2)/(3k+2)}。$$

假设 $N \geqslant m^{(2k+2)/(3k+2)}$，由引理 1.3，

$$f(G) \geqslant \frac{m}{2} + \frac{n}{6} \geqslant \frac{m}{2} + \frac{N}{6} \geqslant$$

$$\frac{m}{2} + \frac{1}{6} m^{(2k+2)/(3k+2)}。$$

情况 2　G 中不含有最小度至少为 q 的子图。类似定理 1.1 证明的讨论，对给定的整数 $k > 2$，G 中任意一个顶点的邻居的导出子图中不包含 C_{2k}，由引理 2.2 知，G 中任意一个度为 d 的顶点的邻居导出子图的边数至多为 $100kd^{1+1/k} < \varepsilon d^{3/2}$，对所有的 $d > (\frac{100k}{\varepsilon})2k/(k-2)$ 均成立。再次应用引理 1.5 和 1.6，可得

$$f(G) \geqslant \frac{m}{2} + \delta \frac{m}{\sqrt{q}} \geqslant \frac{m}{2} + \delta m^{(2k+2)/(3k+2)},$$

其中，$\delta = \delta(k)$ 依实际需要选取。因此，令 $c(k) = \min\left\{\frac{\theta^k}{16(k+1)}, \delta\right\}$，并结合情况 1 和 2 可知，定理 2.1 得证。

3　结论

1）设 $t \geqslant 1$ 是一个正整数，令 H 由单个顶点连接图 $\bigcup_{i=1}^{t} K_{2,s_i}$ 的所有顶点构成的图。对于每一个 $s_i \geqslant 2$，都存在一个常数 $c = c(s_1, s_2, \cdots, s_t) > 0$，使得 $f(m,H) \geqslant m/2 + cm^{(2t+1)/(3t+1)}$。

2）令 H 由单个顶点连接 $K_{2,s}$ 的所有顶点构成的图。那么存在一个常数 $c(s) > 0$，使得 $f(m, H) \geqslant m/2 + c(s)m^{3/4}$。

3）设 $k \geqslant 2$ 是一个正整数，W_{2k} 表示由单个顶点连接圈 C_{2k} 的所有顶点构成的轮图。那么存在一个常数 $c(k) > 0$，使得 $f(m, W_{2k}) \geqslant m/2 + c(k)m^{(2k+2)/(3k+2)}$。

参考文献：

[1] EDWARDS C. An improved lower bound for the number of edges in a largest bipartite subgraph[C]//Proc 2nd Czechoslovak Symposium on Graph Theory, 1975: 167-181.

[2] ALON N. Bipartite subgraphs[J]. Combinatorica, 1996, 16 (3): 301-311.

[3] ALON N, HALPERIN E. Bipartite subgraphs of integer weighted graphs[J]. Discrete Mathematics, 1998, 181 (1/2/3): 19-29.

[4] BOLLOBÁS B, SCOTT A. Problems and results on judicious partitions[J]. Random Structures & Algorithms, 2002, 21 (3/4): 414-430.

[5] SCOTT A. Judicious partitions and related problems[M]// WEBB B S. Surveys in Combinatorics 2005. Cambridge: Cambridge University Press, 2005: 95-118.

[6] BOLLOBÁS B, SCOTT A. Max k-cut and judicious k-partitions [J]. Discrete Mathematics, 2010, 310 (15/16): 2126-2139.

[7] ALON N, BOLLOBÁS B, KRIVELEVICH M, et al. Maximum cuts and judicious partitions in graphs without short cycles[J], Journal of Combinarorial Theory: Series B, 2003, 88(2): 329-346.

[8] ERDÖS P. Problems and results in graph theory and comobinatorial analysis[M]//Graph Theory and Related Topics. New York: Academic Press, 1979: 153-163.

（下转第 102 页）