doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2019.03.017

非线性矩阵方程双对称解的牛顿-MCG 算法

陈世军

(福建工程学院 应用技术学院,福建 福州 350000)

摘要:研究一类含有三次逆幂非线性矩阵方程双对称解数值计算问题。先用牛顿算法迭代计算导出线性矩阵方程双对称解,再用修正共轭梯度算法(MCG 算法)求由牛顿算法导出的线性矩阵方程双对称解或最小二乘双对称解。建立牛顿-MCG 算法求这类矩阵方程双对称解,数值算例表明牛顿-MCG 算法是有效的。

关键词:三次逆幂非线性矩阵方程;双对称解;修正共轭梯度法

中图分类号:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-4348(2019)03-0302-05

A Newton-MCG algorithm for bisymmetric solutions of nonlinear matrix equation

CHEN Shijun

(School of Applied Technology, Fujian University of Technology, Fuzhou 350000, China)

Abstract: The numerical calculation of bisymmetric solutions was conducted for a class of nonlinear matrix equation with cubic inverse power. The bisymmetric solution of the linear matrix equation was obtained by iterative calculation with the Newton algorithm. Then the bisymmetric matrix solution or minimum square bisymmetric matrix solution of the linear matrix equation derived from the Newton algorithm is obtained by the modified conjugate gradient algorithm (MCG algorithm). Numerical examples show that the Newton-MCG algorithm is effective.

Keywords: cubic inverse-power; nonlinear matrix equations; bisymmetric solutions; modified conjugate gradient method

双对称矩阵在信息理论、马尔可夫过程、物理工程等领域中有广泛应用,很多学者研究了矩阵方程(组)的双对称解问题[1-9]。在控制理论、随机滤波分析[10-12]等领域,会遇到形如求矩阵方程

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{X}^{-2}\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{X}^{-3}\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{G} \quad (1)$$

的特殊解问题,其中 $\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{F}_i,\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}(i=1,2,3)$。本文拟用牛顿-修正共轭梯度算法(牛顿-MCG 算法)求解矩阵方程(1)的双对称解。

1　求解方程(1)双对称解的牛顿算法

定义 1　划分 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$,称 $\boldsymbol{S}_n=(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{e}_1)$ 为 n 阶次单位矩阵。若 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_n=\boldsymbol{X}$ 且 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}$,称 $\boldsymbol{X}$ 为双对称矩阵,用 $\boldsymbol{BSR}^{n\times n}$ 表示双对称矩阵集合。

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{-1}$,则方程(1)可以改为

$$\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{X}^3\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{G}$$

为了方便书写,引入下列矩阵函数:

$$\psi(\boldsymbol{X})\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{X}^3\boldsymbol{F}_3-\boldsymbol{G}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}(\psi(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{Y}))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Y}\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^2)\boldsymbol{F}_3-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}$$

收稿日期:2019-03-07
基金项目:福建省教育厅中青年教育科研项目(JZ180190)
作者简介:陈世军(1983-),男,江西瑞金人,讲师,硕士,研究方向:计算数学。

所以记

$$\varphi_X(Y) \overset{\text{def}}{=} E_1 Y F_1 + E_2(XY+YX)F_2 + E_3(XYX + X^2 Y + YX^2)F_3 - X^{-1}YX^{-1}$$

$$\gamma_X(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-X^{-1}Y)^k X^{-1} + E_2 Y^2 F_2 + E_3(XY^2 + Y^2X + YXY + Y^3)F_3$$

容易导出

$$\psi(X+Y) = \psi(X) + \varphi_X(Y) + \gamma_X(Y) \quad (2)$$

这里 $\varphi_X(Y)$ 是 $\psi(X)$ 在“点 X”沿着“方向 Y”的 Frechet 导数。

引理 1[8]　设 $X \in BSR^{n\times n}$ 是方程(1)的近似解,则求方程(1)双对称解 X 可转化为求校正值 $Y \in BSR^{n\times n}$ 使得 $\psi(X+Y)=O$,并可以线性化为求 $Y \in BSR^{n\times n}$ 使得

$$\varphi_X(Y) = -\psi(X) \quad (3)$$

在引理 1 中, $\varphi_X(Y) = -\psi(X)$ 的解 $Y \in BSR^{n\times n}$ 一般不是 $\psi(X+Y)=O$ 的精确解,从而由 $X^* = X+Y$ 确定的 $X^* \in BSR^{n\times n}$ 也不是 $\psi(X)=O$ 的精确解,但是可以看作一个近似解。借鉴牛顿算法的原理,建立求方程(1)双对称解的牛顿算法如下:

第 1 步:给定矩阵 $X^{(k)} \in BSR^{n\times n}$,置 $k:=1$。

第 2 步:若 $\psi(X^{(k)})=O$,计算停止;否则,求 $Y^{(k)} \in BSR^{n\times n}$,使得

$$\varphi_{X^{(k)}}(Y^{(k)}) = -\psi(X^{(k)})$$

第 3 步:计算 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$,置 $k:=k+1$,转第 2 步。

文献[13]中给出了关于牛顿迭代法求非线性矩阵方程的收敛性结论:假设 X^* 是方程(3)的解,则由牛顿算法生成的矩阵序列 $\{X^{(k)}\}$ 收敛于 X^* 。此外,牛顿算法的关键是求解线性矩阵方程(3)。但由于截断误差的存在,对牛顿法中的某个迭代步 k ,矩阵方程(3)可能没有双对称解,此时可求它的最小二乘双对称解,这也是牛顿-MCG 算法的一个特点。

2　求线性矩阵方程(3)双对称解的 MCG 算法

记

$A_1 = E_1,\ B_1 = F_1,\ A_2 = E_2X,\ B_2 = F_2,\ A_3 = E_2,\ B_3 = XF_2,$

$A_4 = E_3X,\ B_4 = XF_3,\ A_5 = E_3X^2,\ B_5 = F_3,$

$A_6 = E_3,\ B_6 = X^2F_3,$

$A_7 = -X^{-1},\ B_7 = X^{-1},\ F = -(X^{-1} + E_1XF_1 + E_2X^2F_2 + E_3X^3F_3 - G)$

下面建立求方程(3)双对称解和最小二乘双对称解的 MCG 算法,考虑方程(3)的一般形式

$$\sum_{i=1}^{7} A_i Y B_i = F \quad (4)$$

其中 $A_i, B_i, C_i, D_i, F \in R^{n\times n}(i=1,2,\cdots,7)$ 。

问题 Ⅰ　当方程(4)有双对称解时,求 $Y \in BSR^{n\times n}$,使其满足方程(4)。

问题 Ⅱ　当方程(4)无双对称解时,求 $Y \in BSR^{n\times n}$,使得

$$\left\| \sum_{i=1}^{7} A_i Y B_i - F \right\| = \min \quad (5)$$

当方程(4)有双对称解时,称问题Ⅰ相容;否则称问题Ⅰ不相容。

参考文献[8]的算法原理,通过修改矩阵 Q_k 的类型,在共轭梯度法的基础上建立求解问题Ⅰ的 MCG 算法如下。引入记号:

$$\mu(Y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{7} A_i Y B_i,\quad w(R) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{7} A_i^{\mathrm{T}} R B_i^{\mathrm{T}}$$

算法 1(求解问题 I 的 MCG 算法)

第 1 步:任意给定初始矩阵 $Y^{(k)} \in BSR^{n\times n}$,置 $k:=1$,计算

$$R_k = F - \mu(Y^{(k)}),\ \tilde{R}_k = w(R_k),$$

$$Q_k = \frac{1}{4}(\tilde{R}_k + \tilde{R}_k^{\mathrm{T}} + S_n(\tilde{R}_k + \tilde{R}_k^{\mathrm{T}})S_n)$$

第 2 步:如果 $R_k = O$,或者 $R_k \neq O$ 而 $Q_k = O$,则停止计算;否则计算

$$\alpha_k = \frac{\|R_k\|^2}{\|Q_k\|^2},\quad Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \alpha_k Q_k$$

第 3 步:计算

$$R_{k+1} = F - \mu(Y^{(k+1)}),\quad \tilde{R}_{k+1} = w(R_{k+1}),$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\|R_{k+1}\|^2}{\|R_k\|^2}$$

$$Q_{k+1} = \frac{1}{4}(\tilde{R}_{k+1} + \tilde{R}_{k+1}^{\mathrm{T}} + S_n(\tilde{R}_{k+1} + \tilde{R}_{k+1}^{\mathrm{T}})S_n) + \beta_{k+1}Q_k$$

第 4 步:置 $k:=k+1$,转第 2 步。

显然,算法 1 中的矩阵 $Y^{(k)}, Q_k \in BSR^{n\times n}$ 。下面给出算法 1 的基本性质,证明算法 1 在有限步计算之后停止,具体证明过程参考文献[14]。

性质 1　对于算法 1 中的矩阵 R_i , Q_i 和

$\tilde{\boldsymbol{R}}_i$,有

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{i+1}^T \boldsymbol{R}_j) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{R}_j) - \frac{\|\boldsymbol{R}_i\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_i\|^2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_i^T \tilde{\boldsymbol{R}}_j)$$

性质 2 设 $k \geqslant 2$,对算法 1 中的矩阵 $\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{Q}_j$,有

$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{R}_j) = 0$, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_i^T \boldsymbol{Q}_j) = 0$ $(i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, k)$

性质 3 设 $\bar{Y} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$ 是问题 Ⅰ 的任意一个双对称解,对任意初始矩阵 $\boldsymbol{Y}^{(1)} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$,由算法 1 得到的矩阵 $\boldsymbol{R}_k$, $\boldsymbol{Y}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{Q}_k$ 满足

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_k^T(\bar{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^{(k)})) = \|\boldsymbol{R}_k\|^2 (k = 1, 2, \cdots)$$

定理 1 设问题 Ⅰ 有双对称解,任意给定初始矩阵 $\boldsymbol{Y}^{(1)} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$,算法 Ⅰ 可在有限步计算后求得问题 Ⅰ 的一组解。问题 Ⅰ 无双对称解的充要条件是存在正整数 k ,使得在算法 1 得到的 $\boldsymbol{R}_k \neq \boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{O}$ 。

定理 2 设问题 Ⅰ 有双对称解,选取初始矩阵 $\boldsymbol{Y}^{(1)} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$ 如下

$$\boldsymbol{Y}^{(1)} = \frac{1}{4}(\mu(\boldsymbol{H}) + \mu^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{S}_n(\mu(\boldsymbol{H}) + \mu^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}))\boldsymbol{S}_n) \quad (\forall \boldsymbol{H} \in \boldsymbol{R}^{n\times n})$$

则在有限步迭代计算后可得问题 Ⅰ 的唯一极小范数解。

3 求解问题 Ⅱ 的 MCG 算法

根据定理 1,在算法 1 中,当 $\boldsymbol{R}_k \neq \boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{O}$ 时,算法 1 中断,表明线性方程(4)无双对称解,需要求解方程(4)最小二乘双对称解。下面把问题 Ⅱ 的求解转化为求解等价正规方程双对称解问题。参照算法 1,建立求方程(4)最小二乘双对称解的迭代算法。

引进记号:

$$f(\boldsymbol{Y}) = w(\mu(\boldsymbol{Y})) + [w(\mu(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}))]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_n(w(\mu(\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}_n)) + [w(\mu(\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n))]^{\mathrm{T}})\boldsymbol{S}_n$$

$$\boldsymbol{N} = w(\boldsymbol{F}) + [w(\boldsymbol{F})]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_n(w(\boldsymbol{F}) + [w(\boldsymbol{F})]^{\mathrm{T}})\boldsymbol{S}_n$$

$$M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} \\ \left(\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{T}_{n,n} \\ \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S}_n \otimes \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n \\ \left(\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S}_n \otimes \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\right) T_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{vec}}(\boldsymbol{F}) \\ \overline{\operatorname{vec}}(\boldsymbol{F}) \\ \overline{\operatorname{vec}}(\boldsymbol{F}) \\ \overline{\operatorname{vec}}(\boldsymbol{F}) \end{pmatrix}, y = \overline{\operatorname{vec}}(\boldsymbol{Y})$$

定理 3 问题 Ⅱ 的解等价于线性矩阵方程 $f(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{N}$ 的双对称解,而且此线性矩阵方程必有双对称解。

证 问题 Ⅱ 的求解等价于求 $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$,使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{F}\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{F}\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{F}\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{F}\right\| = \min \tag{6}$$

下面证明求极小值问题(6)等价于求矩阵方程 $f(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{N}$ 双对称解。将矩阵方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{F}, \ \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{F} \\ \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{F}, \ \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{7}$$

按行拉直可得线性代数方程组 $\boldsymbol{My} = \boldsymbol{f}$,其中 $\boldsymbol{T}_{m,n}$ 表示满足 $\overline{\operatorname{vec}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{T}_{m,n}\overline{\operatorname{vec}}(\boldsymbol{A}_{m\times n})$ 的列交换矩阵[16]。易见,求方程组 $\boldsymbol{My} = \boldsymbol{f}$ 最小二乘解等价于求矩阵方程组(7)的最小二乘解,即求极小值问题(6)的解。方程组 $\boldsymbol{My} = \boldsymbol{f}$ 的正规方程组为 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$,还原为矩阵形式即为矩阵方程 $f(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{N}$ 。

综上所述,求解问题 Ⅱ 等价于求矩阵方程 $f(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{N}$ 双对称解。因为正规方程组 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$ 有解,所以矩阵方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{N}$ 一定有解。假设 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 是它的一组解(未必是双对称解),则 $f(\tilde{\boldsymbol{Y}}) = \boldsymbol{N}$,令 $\tilde{\boldsymbol{Y}}^* = \frac{1}{4}(\tilde{\boldsymbol{Y}} + \tilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_n(\tilde{\boldsymbol{Y}} + \tilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{S}_n)$,显然 $\tilde{\boldsymbol{Y}}^* \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$,且有 $f(\tilde{\boldsymbol{Y}}^*) = \boldsymbol{N}$,故方程 $f(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{N}$ 一定有双对称解。

参照算法 1 以及文献[11]的算法原理,建立求矩阵方程 $f(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{N}$ 双对称解,即求解问题 Ⅱ 的 MCG 算法如下。

算法 2(求解问题 Ⅱ 的 MCG 算法)

第 1 步:给定矩阵 $\boldsymbol{Y}^{(k)} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$,置 $k := 1$,计算

$\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{N} - f(\boldsymbol{Y}^{(k)})$，$\tilde{\boldsymbol{R}}_k = f(\boldsymbol{R}_k)$，$\boldsymbol{Q}_k = \tilde{\boldsymbol{R}}_k$

第 2 步：若 $\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{O}$，则停止计算；否则计算

$$\alpha_k = \frac{\|\boldsymbol{R}_k\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_k\|^2},\ \boldsymbol{Y}^{(k+1)} = \boldsymbol{Y}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{Q}_k$$

第 3 步：计算

$$\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{N} - f(\boldsymbol{Y}^{(k+1)}),\ \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1} = f(\boldsymbol{R}_{k+1}),\ \beta_{k+1} = \frac{\|\boldsymbol{R}_{k+1}\|^2}{\|\boldsymbol{R}_k\|^2},\ \boldsymbol{Q}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1} + \beta_{k+1}\boldsymbol{Q}_k$$

第 4 步：置 $k := k+1$，转第 2 步。

易见，在算法 2 中矩阵 $\boldsymbol{Y}^{(k)}, \boldsymbol{Q}_k \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$，对于算法 2 有类似于算法 1 的收敛定理。

定理 4　给定初始矩阵 $\boldsymbol{Y}^{(1)} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$，算法 2 在有限步迭代计算后可得问题 Ⅱ 解，即矩阵方程(4)最小二乘双对称解。

4　数值算例

下面给出两个算例，在例 1 中，通过改变矩阵的阶数，说明文中建立的算法 1 和算法 2 是可行的，且具有很高的效率。在例 2 中，通过和文献[15]的算法(简称 Li 算法)作比较，说明本文中建立的牛顿-MCG 算法适用范围更广，且能求出此类矩阵双对称约束解。用 t 表示计算时间(s)、n 代表矩阵的阶数、k_1 代表算法 1 迭代次数、k_{12} 代表算法 1 中断次数、k_2 代表算法 2 迭代次数、error 代表实际误差的范数。

采用如下计算步骤：

第 1 步：给定矩阵 $\boldsymbol{X}^{(1)} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$，置 $k := 1$。

第 2 步：若 $\psi(\boldsymbol{X}^{(k)}) = \boldsymbol{O}$，计算停止；否则，采用算法 1 求矩阵方程(4)的双对称解；若方程(4)无双对称解，则采用算法 2 求 $\boldsymbol{Y}^{(k)} \in \boldsymbol{BSR}^{n\times n}$，使得

$$\|\varphi_{\boldsymbol{X}^{(k)}}(\boldsymbol{Y}^{(k)}) + \psi(\boldsymbol{X}^{(k)})\| = \min$$

第 3 步：计算 $\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{Y}^{(k)}$，置 $k := k+1$，转第 2 步。

例 1　用本文建立的算法 1 和算法 2 求矩阵方程(1)的一组双对称解和最小二乘双对称解，取方程(1)系数矩阵均为 n 阶方阵，系数矩阵、终止准则如下：

$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{E}_3 = -2\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F}_3 = 2\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{I}$，$\varepsilon = 10^{-9}$(终止准则)，

选取初始矩阵 $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{O}$，按计算步骤求得矩阵方程(1)的双对称解，结果如表 1(MATLAB 软件 2014 版-PIV3.0 GHz 微机)。

表 1　方程(1)的双对称解计算结果

Tab.1　Calculation results of the bisymmetric solution of equation(1)

n	t/s	k_1	k_{12}	k_2	error
160	3.525 7	325	0	0	2.001 7e-11
320	33.954 5	340	0	0	3.835 2e-11
640	222.747 4	368	0	0	2.850 5e-08
800	595.093 1	518	0	0	7.124 5e-08

当 $n = 4$ 时，可得矩阵方程(1)的双对称解为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0.0746 & 1.1370 & 0 & -0.5685 \\ 1.1370 & 0.0746 & 0.5685 & 0 \\ 0 & 0.5685 & 0.0746 & 1.1370 \\ -0.5685 & 0 & 1.1370 & 0.0746 \end{pmatrix}$$

例 2　用本文算法 1、算法 2 和文献[15]的 Li 算法求方程(1)的特例 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{X}^{-3}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}$，取该特例方程系数矩阵、初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1$、终止准则如下：

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{I}$，$\varepsilon = 10^{-9}$(终止准则)，

(1)选取初始矩阵 $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{O}$，按照算法 1 和 Li 算法求阵方程 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{X}^{-3}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}$ 的一组双对称解，结果如表 2。

表 2　算法 1 与 Li 算法比较结果

Tab.2　Comparison between algorithm 1 and Li algorithm

算法 1			Li 算法
n	t/s	k_1	
4	0.044 1	17	不收敛
8	0.010 6	52	
12	0.007 5	49	
16	0.010 8	56	

(2)当矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为元素全为 1 的 n 阶方阵时，文献[15]中的 Li 算法失效，因为矩阵 $\boldsymbol{G}$ 不正定，不满足文献[15]中算法条件。但本文中的牛顿-MCG 算法有效，能求出方程(1)的双对称解，结果如表 3。

从表 1 可以看出，算法 1 和算法 2 求解矩阵方程(1)是有效的，当方程(1)有双对称解时，可以求出其双对称解。当算法 1 中断时，可以通过算法 2 计算方程(1)的最小二乘双对称解。从表

2,3 可以看出,与文献[15]中的 Li 算法比较,本文建立的牛顿-MCG 算法适应范围更广,能求出矩阵方程(1)特例方程的双对称解。

表 3 牛顿-MCG 算法求方程(1)特例的双对称解计算结果
Tab.3 Calculation results of the special cases of equation (1) with Newton-MCG algorithm

n	t/s	k_1	k_{12}	k_2	error
12	0.084 3	745	0	0	4.584 5e−10
16	0.072 2	556	0	0	1.225 1e−12
20	0.105 3	730	0	0	5.020 2e−12

5 结论

本文建立基于牛顿算法和共轭梯度算法原理建立的单变量非线性矩阵方程(1)双迭代算法,文中采用的 MCG 算法不同于通常的共轭梯度法,它不要求涉及的等价线性矩阵方程(3)的系数矩阵对称正定、可逆或者列满秩,因此总是可行的。本文建立的迭代算法仅要求方程(1)有双对称解,不要求方程(1)的双对称解唯一,也不要求由牛顿算法每一步迭代计算导出的矩阵方程有双对称解。将牛顿-MCG 算法运用于其他非线性矩阵方程,这是下一步的研究的重点。

参考文献:

[1] FENG T X. Bisymmetric minimal rank solutions and its optimal approximation to a class of matrix equation[J]. Journal of Mathematics, 2016, 36(2): 285-292.
[2] 彭卓华. 矩阵方程组的双对称最小二乘解[J]. 长沙大学学报, 2017, 31(5): 1-7.
[3] 赵丽君. 中心子矩阵约束下矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的双对称解[J]. 台州学院学报, 2014, 36(3): 8-11.
[4] 刘莉, 正伟. 耦合矩阵方程的双对称最小二乘解及其最佳逼近[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(12): 82-90.
[5] 林玲. 线性约束下双对称矩阵的最佳逼近问题[J]. 武汉大学学报(理学版), 2007, 53(3): 267-270.
[6] 李姣芬, 彭振赟, 彭靖静. 矩阵不等式约束下矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的双对称解[J]. 计算数学, 2013, 35(2): 137-150.
[7] 彭卓华. 子矩阵约束下矩阵方程组的双对称最小二乘解[J]. 数学物理学报, 2015, 35(1):131-150.
[8] 张肖肖, 张凯院, 宋卫红. 含高次逆幂的矩阵方程对称解的双迭代算法[J]. 数学杂志, 2016, 36(2): 437-444.
[9] 龙建辉, 何佑梅. 双反对称的线性方程组的迭代算法[J]. 齐齐哈尔大学学报, 2010, 26(3): 69-73.
[10] 郑岩, 李健, 李智. 一种基于随机滤波器的测量矩阵优化算法[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(3): 632-636.
[11] 彭珍妮, 贲德, 张弓. 基于混沌随机滤波器的 CS-MIMO 雷达测量矩阵优化设计[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(3): 532-536.
[12] 韩玉兰, 朱洪艳, 韩崇昭. 采用随机矩阵的多扩展目标滤波器[J]. 西安交通大学学报, 2015, 49(7): 98-104.
[13] LONG J H, HU X Y, ZHANG L. Improved Newton's method with exact line searches to solve quadratic matrix equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 222: 645-654.
[14] 陈世军. 矩阵方程组异类约束解的 MCG1-3-5 算法[J]. 福建工程学院学报, 2018, 16(4): 365-371.
[15] 李静, 张玉海. 矩阵方程 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-q}\boldsymbol{A}=Q$ 当 $q>1$ 时的 Hermite 正定解[J].工程数学学报, 2005, 22(4): 679-686.
[16] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 105-113.

(特约编辑: 黄家瑜)