

doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2019.01.014

带有不确定性异结构混沌系统的有限时间同步

林美丽¹,袁正中²,蔡建平²

(1. 福建工程学院 数理学院,福建 福州 350118;
2. 闽南师范大学 数学与统计学院,福建 漳州 363000)

摘要: 研究带有未知参数和外界扰动的异结构混沌系统有限时间同步,采用自适应控制方法实现系统的有限时间同步,引入虚拟未知参数有效地避免控制器和参数更新率中出现系统未知参数问题。通过数值仿真验证了该方法的有效性。

关键词: 有限时间同步;异结构混沌系统;虚拟未知参数

中图分类号: O231.2

文献标志码: A

文章编号: 1672-4348(2019)01-0077-06

Finite-time synchronization between two different chaotic systems with uncertainties

LIN Meili¹, YUAN Zhengzhong², CAI Jianping²

(1. Mathematics and Physics Institute, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: The finite-time synchronization of two different chaotic systems with unknown parameters and external disturbances was studied. The adaptive control method was used to realize the finite-time synchronization of the system. Virtual unknown parameters were introduced in order to avoid the unknown parameters from appearing in the controllers and parameters update rate. Numerical simulations verified the effectiveness of the method.

Keywords: finite-time synchronization; different chaotic systems; virtual unknown parameters

近年来,由于混沌系统的理论研究价值及其在实际应用中的优势,混沌同步研究在不同领域被研究、关注^[1-4]。有限时间同步是混沌同步研究的主要问题之一,目前已取得一系列成果^[5-12]:对于两个带有不确定性的异结构二阶混沌系统,采用状态反馈控制器实现有限时间同步^[5];对于两个相同的 4 阶 Rabinovich 超混沌系统,设计反馈控制器实现主从系统有限时间同步^[10];对于两个相同的混沌系统,利用非奇异坐标变换,设计自适应控制器实现系统的有限时间同步^[11];对于两个带有或不带有未知参数的异阶混沌系统,分别设计自适应控制器和反馈控制器实现有限时间同步^[12]。但是文献[5][12]中的控制器包含主-

从系统的所有信息,一般情况下很难实现。

实际系统难免存在不确定性,因此,F. Amato 等研究带有时变未知参数和参数扰动的线性系统有限时间控制问题^[13]。对于带有非线性不确定性的一类混沌系统,T.G. Gao 等设计滑模控制器,使系统在有限时间内有效跟踪一个光滑目标轨迹^[14]。对于两个完全相同的混沌系统,H. Wang 等设计含有 $e^\beta(\beta = q/p < 1)$ 项的控制器实现有限时间同步^[15]。对于带有不确定性的永磁同步电动机系统,Y. H. Sun 等设计自适应控制器实现系统的有限时间同步和参数识别^[16]。对于两个相同的二阶非自治混沌系统,Y.Q. Yang 等设计线性状态反馈控制器实现主-从系统有限时间同步^[17]。

收稿日期: 2018-09-09

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(61403181);福建省教育厅资助项目(JAT160294);福建省自然科学基金资助项目(2018J01550)

第一作者简介: 林美丽(1984-),女,福建福州人,讲师,博士,研究方向:混沌同步等。

本研究引入虚拟未知参数实现结构混沌系统的有限时间同步,避免了控制器和参数更新率中出现系统未知参数,在此基础上,采用自适应控制方法实现混沌系统的有限时间同步。

1 问题描述

考虑带有未知参数和外界扰动的系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态变量, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^m$ 是未知参数, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 是非线性矩阵函数, $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n$ 是外界扰动。

引入虚拟未知参数 α_{m+1} , 方程(1)改写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\bar{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

其中 $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n \times (m+1)}$ 是非线性函数, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^T = (\boldsymbol{\alpha}^T, \alpha_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$ 是新的参数。称 $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 中与虚拟参数 α_{m+1} 对应的项为虚拟项。

注 1. 许多混沌系统都可以描述为系统(1)、(2)的形式。以 Lorenz 系统为例,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} =$$

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\bar{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (3)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为未知参数, $\alpha_4 = 1$ 是虚拟未知参数, $-x_2$ 是与未知参数 α_4 相对应的虚拟项。显然,虚拟未知参数 $\alpha_4 = 1$ 是系统已知项 $-x_2$ 的系数,故虚拟未知参数的选取不会对理论和仿真结果产生影响。值得注意的是, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 中每个线性或非线形元素都可作为 $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 中与虚拟参数 α_{m+1} , ($\alpha_{m+1} \neq 0$) 对应的虚拟项。

注 2. 系统(1)与(2)是一致的,虚拟未知参数并不改变系统的行为。

2 有限时间同步

令方程(1)为驱动系统,其对应的响应系统为

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{G}(\mathbf{y})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \quad (4)$$

响应系统(4)所对应的含有虚拟未知参数的系统为

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \quad (5)$$

其中 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态向量, $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{G}(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{n \times l}$, $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{n \times (l+1)}$ 是非线性函数。 $\bar{\boldsymbol{\beta}}^T = (\boldsymbol{\beta}^T, \beta_{l+1}) \in \mathbf{R}^{l+1}$, 其中 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^l$ 是系统(4)中的未知参数,而 β_{l+1} 是虚拟未知参数, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ 是控制器。

在设计控制器 $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ 和参数更新率实现耦合系统(1)与(4)的有限时间同步。由于系统的等价性,将其变化为系统(2)与(5)的有限时间同步问题。为此,给出下列假设:

H1. 非线性函数 $\bar{\mathbf{f}}(\cdot)$, $\bar{\mathbf{g}}(\cdot)$ 是连续且光滑的。即存在一个正常数 M ,使得

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq M.$$

H2. 非线性函数 $\bar{\mathbf{g}}(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件,即

$$\|\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y})\| \leq L_{\bar{\mathbf{g}}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

其中 $L_{\bar{\mathbf{g}}}$ 是适当的正常数。这里 $\|\cdot\|$ 表示矩阵范数,即对任意矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times m}$, 有 $\|\mathbf{A}\| = (\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$ 。

H3. 不确定参数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 和外界扰动 $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ 均范数有界,即

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| \leq \delta_{\alpha}, \|\boldsymbol{\beta}\| \leq \delta_{\beta}, \|\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)\| \leq \delta_d,$$

其中 $\delta_{\alpha}, \delta_{\beta}, \delta_d$ 是正常数。因此,存在两个正常数 $\bar{\delta}_{\alpha}, \bar{\delta}_{\beta}$,使得

$$\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| = \bar{\delta}_{\alpha} \leq \delta_{\alpha} + |\alpha_{m+1}|,$$

$$\|\bar{\boldsymbol{\beta}}\| = \bar{\delta}_{\beta} \leq \delta_{\beta} + |\beta_{l+1}|.$$

定义误差变量 $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, 可得误差系统为

$$\dot{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) + \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\bar{\boldsymbol{\alpha}} - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \quad (6)$$

因此系统(2)-(5)的有限时间同步问题转化为误差系统(6)的有限时间稳定问题。下文给出有限时间同步的定义和一些引理。

定义^[15] 考虑两个混沌系统:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m), \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{h}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s), \quad (7)$$

其中 $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s$ 是 n 维向量。下标 ' m '、' s ' 分别表示主、从系统。 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{h}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是向量函数。如果存在一个常数 $T > 0$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow T} \|x_m - x_s\| = 0,$$

且若 $t \geq T$, 有 $\|x_m - x_s\| \equiv 0$, 则称系统(7)有有限时间同步。

引理1^[18] 假设连续正定函数 $V(t)$ 满足下列不等式, $\dot{V}(t) \leq -cV^\eta(t)$, $\forall t > 0, V(t_0) \geq 0$, 其中 $c > 0, 0 < \eta < 1$ 是常数, 则对于任意给定正常数 t_0 , $V(t)$ 满足 $V^{1-\eta}(t) \leq V^{1-\eta}(t_0) - c(1-\eta)(t-t_0)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, 且当 $t > t_1$ 时, 有 $V(t) \equiv 0$, 其中 $t_1 = t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}$ 。

引理2^[6] 对于任意给定 $a, b \in R, 0 < q \leq 1$, 下列不等式成立, $(|a| + |b|)^q \leq |a|^q$

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \bar{F}(x)^T e + \frac{k_3(0, \dots, 0, \text{sgn}(\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1}))^T}{|\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1}|}, & \alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1} \neq 0 \\ \bar{F}(x)^T e, & \text{其它} \end{cases}, \quad (9)$$

$$\dot{\beta} = \begin{cases} -\bar{G}(y)^T e + \frac{k_4(0, \dots, 0, \text{sgn}(\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1}))^T}{|\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1}|}, & \beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1} \neq 0 \\ -\bar{G}(y)^T e, & \text{其它} \end{cases}, \quad (10)$$

其中 $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_{m+1})^T, \hat{\beta} = (\hat{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_l \hat{\beta}_{l+1})^T$, $\hat{\alpha}_{m+1}, \hat{\beta}_{l+1}$ 分别表示向量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 的最后一个元素, $k_3 = \bar{\delta}_\alpha + \|\hat{\alpha}\|, k_4 = \bar{\delta}_\beta + \|\hat{\beta}\|$, 则主-从系统(2)与(5), 亦即系统(1)与(4)实现有限时间同步。

证明: 选取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} (\bar{\alpha} - \hat{\alpha})^T (\bar{\alpha} - \hat{\alpha}) + \frac{1}{2}$$

$$(\bar{\beta} - \hat{\beta})^T (\bar{\beta} - \hat{\beta}).$$

容易验证, 当控制器为(8)-(10)时, 方程(6)右端不连续。因此由微分包含理论^[19], 方程(6)改写为

$$\dot{e} \in \text{a.e.} K[\bar{f}(x) - \bar{g}(y) + \bar{F}(x)\bar{\alpha} - \bar{G}(y)\bar{\beta} + d(x, t) - u(t, x)], \quad (11)$$

其中“a.e.”表示几乎处处, “ $K[\cdot]$ ”为微分包含。

从而, V 沿着误差系统(11)的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &\in \text{a.e.} K[e^T \dot{e} - (\bar{\alpha} - \hat{\alpha})^T \dot{\alpha} - (\bar{\beta} - \hat{\beta})^T \dot{\beta}] \\ &= e^T(\bar{f}(x) - \bar{g}(y) + \bar{F}(x)\bar{\alpha} - \bar{G}(y)\bar{\beta} + d(x, t) - u(t, x)) - (\bar{\alpha} - \hat{\alpha})^T \dot{\alpha} - (\bar{\beta} - \hat{\beta})^T \dot{\beta} \end{aligned}$$

由假设 H1~H3 和方程(8)可得

$$+ |b|^q.$$

下面给出主要结果。

定理1 若假设条件 H1~H3 成立, 且满足下列条件:

(I) 控制器

$$u(x, t) = \begin{cases} k_1 e + (k_2 + 1) \frac{e}{\|e\|} + \bar{F}(x)\hat{\alpha} - \bar{G}(y)\hat{\beta}, & e \neq 0 \\ \bar{F}(x)\hat{\alpha} - \bar{G}(y)\hat{\beta} & e = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $k_1 \geq L_{\bar{g}}, k_2 \geq \delta_d + M, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 是向量参数。

(II) $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 的参数更新率

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T(\bar{f}(x) - \bar{g}(x)) + e^T(\bar{g}(x) - \bar{g}(y)) + e^T \bar{F}(x)(\bar{\alpha} - \hat{\alpha}) - e^T \bar{G}(y)(\bar{\beta} - \hat{\beta}) + e^T d(x, t) - e^T[k_1 e + (k_2 + 1) \frac{e}{\|e\|}] - (\bar{\alpha} - \hat{\alpha})^T \dot{\alpha} - (\bar{\beta} - \hat{\beta})^T \dot{\beta} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\leq M \|e\| + L_{\bar{g}} \|e\|^2 + e^T \bar{F}(x)(\bar{\alpha} - \hat{\alpha}) - e^T \bar{G}(y)(\bar{\beta} - \hat{\beta}) + \delta_d \|e\| - e^T \left[k_1 e + (k_2 + 1) \frac{e}{\|e\|} \right] (\bar{\alpha} - \hat{\alpha})^T \dot{\alpha} - (\bar{\beta} - \hat{\beta})^T \dot{\beta} \end{aligned}$$

根据 $k_1 \geq L_{\bar{g}}, k_2 \geq \delta_d + M$ 和方程(9)、(10), 有下列不等式成立

$$\dot{V} \leq -\|e\| + e^T \bar{F}(x)(\bar{\alpha} - \hat{\alpha}) - e^T \bar{G}(y)(\bar{\beta} - \hat{\beta}) - (\bar{\alpha} - \hat{\alpha})^T \dot{\alpha} - (\bar{\beta} - \hat{\beta})^T \dot{\beta}.$$

下面分3种情形讨论:

情形1. 若 $\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1} \neq 0$ 且 $\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1} \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\|e\| - (\bar{\alpha} - \hat{\alpha})^T \frac{k_3(0, \dots, 0, \text{sgn}(\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1}))^T}{|\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1}|} - (\bar{\beta} - \hat{\beta})^T \frac{k_4(0, \dots, 0, \text{sgn}(\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1}))^T}{|\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1}|} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \|e\| - \frac{k_3 |\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1}|}{|\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1}|} - \frac{k_4 |\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1}|}{|\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1}|} = \\
& - \|e\| - \|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\| \cdot \frac{k_3}{\|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\|} - \\
& \|\bar{\beta} - \hat{\beta}\| \cdot \frac{k_4}{\|\bar{\beta} - \hat{\beta}\|}
\end{aligned}$$

显然下列不等式成立,

$$\|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\| \leq \|\bar{\alpha}\| + \|\hat{\alpha}\| \leq \delta_\alpha + \|\hat{\alpha}\| = k_3,$$

$$\|\bar{\beta} - \hat{\beta}\| \leq \|\bar{\beta}\| + \|\hat{\beta}\| \leq \delta_\beta + \|\hat{\beta}\| = k_4.$$

因此,

$$\dot{V} \leq -\|e\| - \|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\| - \|\bar{\beta} - \hat{\beta}\|.$$

由引理 2 可得,

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq -(\|e\|^2 + \|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\|^2 + \|\bar{\beta} - \hat{\beta}\|^2) \frac{1}{2} = \\
& -2^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

情形 2. 若 $\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1} = 0$ 且 $\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1} = 0$, 则有

$$\dot{V} \leq -\|e\|.$$

令 $V_1 = \|e\|^2$, 则有 $\dot{V} \leq -(V_1)^{\frac{1}{2}}$.

由文献[20]得, $\dot{V} \leq -\sqrt{\theta} V^{\frac{1}{2}}$, 其中 $\theta = \frac{V_1}{V^*} \leq$

1, V^* 是 V 的上界。

情形 3. 若 $\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1} = 0$ 或 $\beta_{l+1} - \hat{\beta}_{l+1} = 0$ 。

不失一般性, 假设 $\alpha_{m+1} - \hat{\alpha}_{m+1} = 0$, 则有

$$\dot{V} \leq -\|e\| - \|\bar{\beta} - \hat{\beta}\|.$$

同理, 令 $V_2 = \|e\|^2 + \|\bar{\beta} - \hat{\beta}\|^2$, 可得 $\dot{V} \leq -$

$(\sqrt{2} V_2)^{\frac{1}{2}}$ 。因此有下列不等式成立,

$$\dot{V} \leq -\sqrt{\theta_1} V^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\theta_1 = \frac{V_2}{V^{1*}} \leq 1$, V^{1*} 是 V_2 的上界。

综上所述, 存在正常数 $0 < \theta^* \leq 1$, 使得

$$\dot{V} \leq -\sqrt{\theta^*} V^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 1 可知, 当 $t = t_1$ 时, 误差系统(6)稳定于原点, 其中

$$t_1 = t_0 + \frac{V^{1-\frac{1}{2}}(t_0)}{\theta^{*\frac{1}{2}}(1 - \frac{1}{2})} = t_0 + \theta^{*\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}}(t_0).$$

因此驱动-响应系统(2)与(5), 即系统(1)与(4)实现有限时间同步。

注 3. 定理 1 引入虚拟未知参数是为了在控

制器和参数更新率中不出现未知参数情况下, 实现异结构混沌系统有限时间同步。但是, 如文献[21], 控制器中含有未知参数。

注 4. 定理 1 可推广到具有多个虚拟未知参数的异结构混沌系统的有限时间同步。

3 数值仿真

算例 1: Rössler 系统和修正的 Chua 系统

为验证上述方法的有效性, 选取 Rössler 系统为主系统,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 x_3 + 0.2 \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} x_2 + x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} d_1(x, t) \\ d_2(x, t) \\ d_3(x, t) \end{bmatrix},
\end{aligned} \quad (13)$$

其中, $d(x, t)$ 为外界扰动, α 为未知参数。

从系统为修正的 Chua 系统^[22]

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 - y_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} y_2 - \frac{1}{7}(2y_1^3 - y_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \\ 0 & -y_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (14)$$

选取参数 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = -7, \beta_1 = 10, \beta_2 = \frac{100}{7}$, 虚拟未知参数为 $\alpha_4 = \beta_3 = 1$, 外界扰动 $d = (d_1, d_2, d_3)^T = (0.05x_2 \sin t, 0.1x_3 \sin 3t, 0.01x_1 \cos 2t)^T$ 。图 1 说明当初值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (1, 1, 1)^T$ 时, 在上述参数条件下, 系统具有混沌现象且吸引子的界为 $-12 < x_1 < 14, -14 < x_2 < 10, 0 < x_3 < 34$ 。

从而可得 $\|f(x) - g(x)\| \leq 478, \|g(x) - g(y)\| \leq 2\|x - y\|, |\bar{\delta}_\alpha| \leq 8.1, |\bar{\delta}_\beta| \leq 18.6, |\bar{\delta}_d| \leq 2.7$ 。选取 $k_1 = 3, k_2 = 481$, 初始值 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T = (-1, 2, -1)^T$,

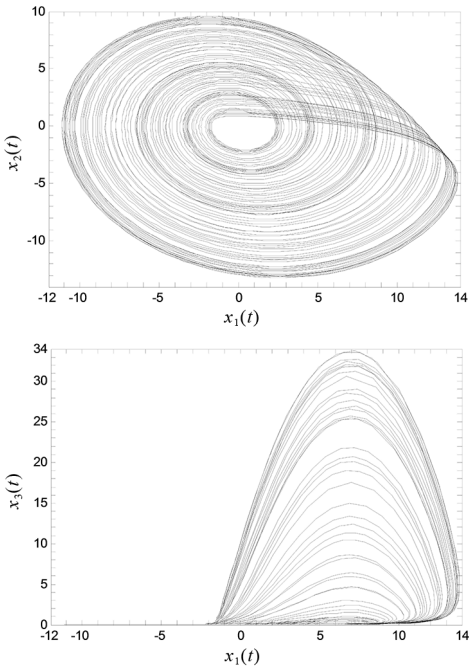


图 1 Rössler 系统混沌吸引子在 x_1 - x_2 平面、 x_1 - x_3 平面上的投影

Fig.1 x_1 - x_2 and x_1 - x_3 plane projections of Rössler attractor

$(\hat{\alpha}_1(0), \hat{\alpha}_2(0), \hat{\alpha}_3(0), \hat{\alpha}_4(0))^T = (1, 2, 3, 1)^T$, $(\hat{\beta}_1(0), \hat{\beta}_2(0), \hat{\beta}_3(0))^T = (0.5, 1, 1.5)^T$ 。由图 2 可知,误差向量 e 收敛到 0。即主-从系统实现有限时间同步。

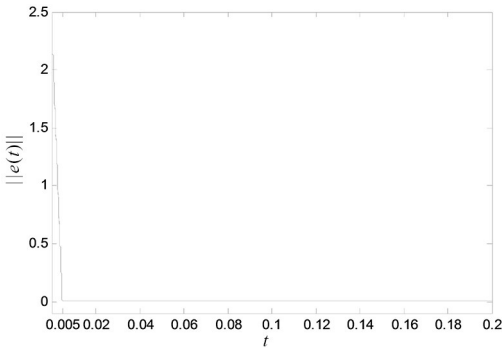


图 2 混沌系统 (3)-(15) 的同步误差
Fig.2 Synchronization error between systems (3) and (15)

算例 2: Lorenz 系统和 Genesio 系统

选取 Lorenz 系统 (3) 为主系统, 从系统为 Genesio 系统^[23],

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

选取参数 $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 28, \alpha_3 = \frac{8}{3}, \beta_1 = -6, \beta_2 = -2.92, \beta_3 = -1.2$, 虚拟未知参数为 $\alpha_4 = \beta_4 = 1$, 外界扰动 $d = (d_1, d_2, d_3)^T = (0.05x_2 \sin t, 0.1x_3 \sin 3t, 0.01x_1 \cos 2t)^T$ 。图 3 说明当初值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (2, 4, 3)^T$ 时, 在上述参数条件下, 系统具有混沌现象且吸引子的界为 $-20 < x_1 < 20, -26 < x_2 < 27, 0 < x_3 < 48$ 。

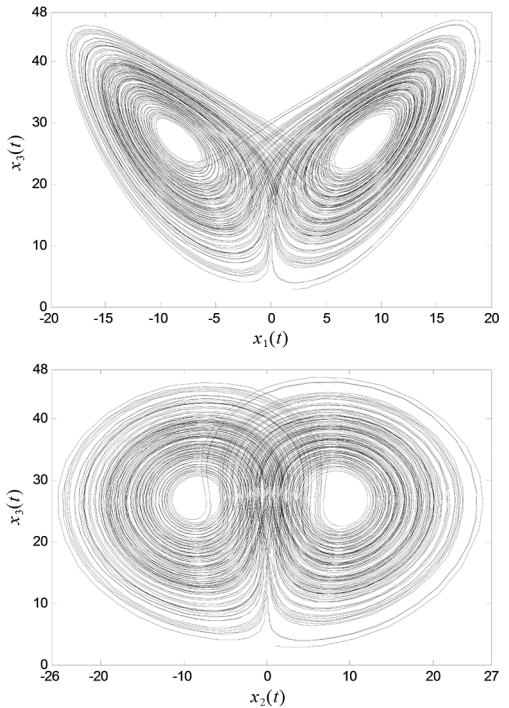


图 3 Lorenz 系统混沌吸引子在 x_1 - x_3 平面、 x_2 - x_3 平面上的投影

Fig.3 x_1 - x_3 and x_2 - x_3 plane projections of Lorenz attractor

从而可得 $\|\bar{f}(x) - \bar{g}(x)\| \leq 1144, \|\bar{g}(x) - \bar{g}(y)\| \leq 2\|x - y\|$, $|\bar{\delta}_\alpha| \leq 30, |\bar{\delta}_\beta| \leq 6.8, |\bar{\delta}_d| \leq 5$ 。选取 $k_1 = 3, k_2 = 1149$, 初始值 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T = (-1, 0, -2)^T$, $(\hat{\alpha}_1(0), \hat{\alpha}_2(0), \hat{\alpha}_3(0), \hat{\alpha}_4(0))^T = (0.1, 1.5, 2, 0.7)^T$, $(\hat{\beta}_1(0), \hat{\beta}_2(0), \hat{\beta}_3(0), \hat{\beta}_4(0))^T = (0.3, 2, 0.5, 1)^T$ 。由图 4 可知, 误差向量 e 收敛到 0, 即主-从

系统实现有限时间同步。

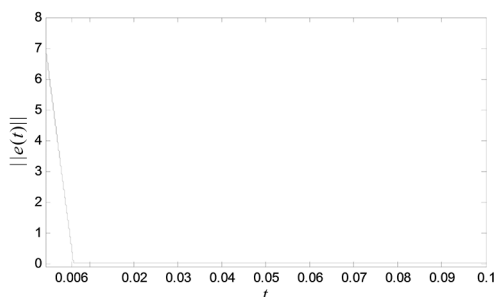


图 4 混沌系统(3)–(15)的同步误差

Fig.4 Synchronization error between systems (3) and (15)

4 结论

研究带有外界扰动和未知参数的两个异结构混沌系统的有限时间同步问题。通过引入虚拟未知参数,设置控制器和未知参数更新率实现了系统的有限时间同步,有效地避免了控制器和参数更新率中出现系统未知参数,使方法更具备实用性。数值仿真说明上述方法的有效性。

参考文献:

- [1] ZHANG R M, ZENG D Q, ZHONG S M, et al. New approach on designing stochastic sampled-data controller for exponential synchronization of chaotic Lur'e systems [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2018, 29: 303–321.
- [2] TAO C H, XIONG H X, HU F. Two novel synchronization criterions for a unified chaos system [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27: 115–120.
- [3] ZENG D, WU K T, LIU Y, et al. Event-triggered sampling control for exponential synchronization of chaotic Lur'e systems with time-varying communication delays [J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(2): 905–921.
- [4] YASSEN M T. Adaptive synchronization of two different uncertain chaotic systems [J]. Physics Letter A, 2005, 337: 335–341.
- [5] LI S H, TIAN Y P. Finite time synchronization of chaotic systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 15: 303–310.
- [6] LI J, QIAN C J. Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51: 879–884.
- [7] CAI N, LI W Q, JING Y W. Finite-time generalized synchronization of chaotic systems with different order [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 64: 385–393.
- [8] PERRUQUETTI W, FLOQUENT T, MOULAY E. Finite-time observers: application to secure communication [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(1): 356–360.
- [9] HONG Y G, YANG G U, BUSHNELL L, et al. Global finite-time stabilization: from state feedback to output feedback [C]//39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney: [s.n.], 2000: 2908–2913.
- [10] LIU Y J. Circuit implementation and finite-time synchronization of the 4D rabinovich hyperchaotic system [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67: 89–96.
- [11] VINCENT U E, GUO R. Finite-time synchronization for a class of chaotic and hyperchaotic systems via adaptive feedback controller [J]. Physics Letters A, 2011, 375: 2322–2326.
- [12] ZHANG D Y, MEI J, MIAO P. Global finite-time synchronization of different dimensional chaotic systems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 48: 303–315.
- [13] AMATO F, ARIOLA M, DORATO P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances [J]. Automatica, 2001, 37: 1459–1463.
- [14] GAO T G, CHEN Z Q, CHEN G R, et al. Finite-time control of chaotic systems with nonlinear inputs [J]. Chinese Physics, 2006, 15: 1190–06.
- [15] WANG H, HAN Z Z, XIE Q Y, et al. Finite-time chaos synchronization of unified chaotic system with uncertain parameters [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14: 2239–2247.
- [16] SUN Y H, WU X P, BAI L Q, et al. Finite-time synchronization control and parameter identification of uncertain permanent magnet synchronous motor [J]. Neurocomputing, 2016, 207: 511–518.
- [17] YANG Y Q, WU X F. Global finite-time synchronization of a class of the non-autonomous chaotic systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 70(1): 197–208.
- [18] HALE J K. Ordinary differential equations [M]. Huntington: Krieger, 1969.