第 16 卷 第 4 期
2018 年 8 月

福建工程学院学报
Journal of Fujian University of Technology

Vol.16 No.4
Aug. 2018

doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2018.04.012

矩阵方程组异类约束解的 MCG1-3-5 算法

陈世军

(福建工程学院 应用技术学院,福建 福州 350001)

摘要:借鉴求线性矩阵方程组同类约束解的 MCG 算法(修正共轭梯度法),建立了求多个未知矩阵的线性矩阵方程组的一种异类约束解的 MCG1-3-5 算法,证明了该算法的收敛性。该算法不仅可以判断矩阵方程组的异类约束解是否存在,而且在有异类约束解,且不考虑舍入误差时,可在有限步计算后求得矩阵方程组的一组异类约束解;选取特殊初始矩阵时,求得矩阵方程组的极小范数异类约束解。同时还能求取指定矩阵在该矩阵方程组异类约束解集合中的最佳逼近。算例表明,该算法有效。

关键词:线性矩阵方程组;异类约束矩阵;MCG1-3-5 算法;收敛性;最佳逼近

中图分类号:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-4348(2018)04-0365-07

An MCG1-3-5 algorithm for heterogeneous constrained solutions of matrix equations

CHEN Shijun

(School of Applied Technology, Fujian University of Technology, Fuzhou 350001, China)

Abstract: Based on the modified conjugate gradient method (MCG) for the same constrained solutions of linear matrix equations, a modified conjugate method MCG1-3-5 was established for heterogeneous constrained solutions of linear matrix equations with multiple unknown matrices. The convergence of this algorithm was also proved. This algorithm can not only judge the existence of heterogeneous constrained solutions of matrix equations, but also obtain a set of such solutions within finite iterative steps in the absence of round off errors when there do exist heterogeneous constrained solutions. When a special initial matrix is selected, the heterogeneous constrained solution with a minimal norm can be obtained for the matrix equations. Meanwhile, the optimal approximation of the given matrix can be obtained in the set of the above-mentioned solutions. The example shows that the method is quite effective.

Keywords: linear matrix equations; heterogeneous constrained matrices; modified conjugate gradient method 1-3-5(MCG1-3-5); convergence; optimal approximation

矩阵方程特殊解的计算在电学、结构动力学、振动理论、自动控制理论等领域都有重要的应用。由于涉及的数据不够完整或需要对已有数据进行修正,许多问题最后都归结或转化为求矩阵方程(组)的约束解问题。盛兴平、袁飞、郑凤芹、张骞和 Dehghan 等建立了求单变量和双变量矩阵方程(组)同类约束解的迭代算法[1-6],武见、解培月、李书连和刘晓敏等建立了求双变量和多变量矩阵方程(组)异类约束解的迭代算法[7-10]。但在求解矩阵方程组的异类约束对称解、中心对称解、自反解领域研究较少,本文以 3 个未知矩阵方程组为例,参考文献[7-10],建立求其异类约束解的迭代算法。

收稿日期:2018-05-15
基金项目:福建工程学院教育科学研究项目(GB-RJ-17-65)
作者简介:陈世军(1983-),男,江西瑞金人,讲师,硕士,研究方向:计算数学。

1 问题的提出

用$\boldsymbol{R}^{m\times n}$表示$m\times n$实矩阵的集合,$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的 Kronecker 积,$\overline{\mathrm{vec}}(\boldsymbol{A})$表示将矩阵$\boldsymbol{A}$按行拉直构成的列向量.定义同阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的内积为$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$,由此导出矩阵的 Frobenius 范数$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}]}$.在本文中记为$\Omega_1$代表对称矩阵集合,$\Omega_3$代表中心对称矩阵集合,$\Omega_5$代表自反矩阵集合.当$\boldsymbol{X}\in\Omega_1,\boldsymbol{Y}\in\Omega_3,\boldsymbol{Z}\in\Omega_5$时,记作$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in\Omega_{1-3-5}$,并称$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$为约束 1 - 3 - 5 矩阵。

本文讨论矩阵方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{G}_1\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{G}_2\end{cases}\tag{1}$$

的下列问题:

问题 Ⅰ 给定$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{D}_i,\boldsymbol{F}_i,\boldsymbol{G}_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}(i=1,2)$,求$\boldsymbol{X}\in\Omega_1,\boldsymbol{Y}\in\Omega_3,\boldsymbol{Z}\in\Omega_5$,使得

$$\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_i-\boldsymbol{G}_i\|=\min$$

问题 Ⅱ 给定$\boldsymbol{X}^{(0)},\boldsymbol{Y}^{(0)},\boldsymbol{Z}^{(0)}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{S}_E$表示问题 Ⅰ 的解集合,求$(\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{Y}},\hat{\boldsymbol{Z}})\in\boldsymbol{S}_E$使得

$$\left\|\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}\\ \hat{\boldsymbol{Y}}\\ \hat{\boldsymbol{Z}}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(0)}\\ \boldsymbol{Y}^{(0)}\\ \boldsymbol{Z}^{(0)}\end{pmatrix}\right\|=\min_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in\boldsymbol{S}_E}\left\|\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(0)}\\ \boldsymbol{Y}^{(0)}\\ \boldsymbol{Z}^{(0)}\end{pmatrix}\right\|$$

1.1 求解问题 I 的迭代算法

引进记号:$g_i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_i\quad(i=1,2)$

$$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{G}_i-(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_i)\ (i=1,2)$$

$$f(\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2)\\ f_2(\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2)\\ f_3(\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2)\end{pmatrix}$$

$$g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=\begin{pmatrix}g_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\\ g_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\end{pmatrix},\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_1\\ \boldsymbol{G}_2\end{pmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R}^{n\times n},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{I}$

修正共轭梯度算法(MCG1 - 3 - 5 算法)

第 1 步 选取初始矩阵$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in\Omega_{1-3-5}$,置$k:=1$,计算

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{G}-g(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{Y}^{(1)},\boldsymbol{Z}^{(1)})\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1^{(1)}\\ \boldsymbol{R}_2^{(1)}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_1=f(\boldsymbol{R}_1^{(1)},\boldsymbol{R}_2^{(1)})\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(1)}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(1)}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(1)}+(\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(1)})^{\mathrm{T}}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(1)}+\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(1)}\boldsymbol{S}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(1)}+\boldsymbol{P}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\end{pmatrix}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{(1)}\\ \boldsymbol{P}_2^{(1)}\\ \boldsymbol{P}_3^{(1)}\end{pmatrix}$$

第 2 步 若$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{R}_k\neq\boldsymbol{O}$而$\boldsymbol{Q}_k=\boldsymbol{O}$,停止,否则计算

$$a_k=\frac{\|\boldsymbol{R}_k\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_k\|^2},\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(k+1)}\\ \boldsymbol{Y}^{(k+1)}\\ \boldsymbol{Z}^{(k+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(k)}\\ \boldsymbol{Y}^{(k)}\\ \boldsymbol{Z}^{(k)}\end{pmatrix}+a_k\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{(k)}\\ \boldsymbol{P}_2^{(k)}\\ \boldsymbol{P}_3^{(k)}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{k+1}=\boldsymbol{G}-g(\boldsymbol{X}^{(k+1)},\boldsymbol{Y}^{(k+1)},\boldsymbol{Z}^{(k+1)})\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1^{(k+1)}\\ \boldsymbol{R}_2^{(k+1)}\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{k+1}=f(\boldsymbol{R}_1^{(k+1)},\boldsymbol{R}_2^{(k+1)})\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(k+1)}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(k+1)}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(k+1)}\end{pmatrix},$$

$$\beta_k=\frac{\|\boldsymbol{R}_{k+1}\|^2}{\|\boldsymbol{R}_k\|^2}$$

$$\boldsymbol{Q}_{k+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(k+1)}+(\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(k+1)})^{\mathrm{T}}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(k+1)}+\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(k+1)}\boldsymbol{S}\\ \widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(k+1)}+\boldsymbol{P}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(k+1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\end{pmatrix}+$$

$$\beta_k\boldsymbol{Q}_k\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{(k+1)}\\ \boldsymbol{P}_2^{(k+1)}\\ \boldsymbol{P}_3^{(k+1)}\end{pmatrix}$$

第 3 步 置$k=k+1$,转第 2 步。

易见,MCG1 - 3 - 5 算法中的矩阵$(\boldsymbol{X}^{(k)},\boldsymbol{Y}^{(k)},\boldsymbol{Z}^{(k)})\in\Omega_{1-3-5}$,$(\boldsymbol{P}_1^{(k)},\boldsymbol{P}_2^{(k)},\boldsymbol{P}_3^{(k)})\in\Omega_{1-3-5}$。

下面讨论 MCG1 - 3 - 5 算法的基本性质,证明 MCG1 - 3 - 5 算法在有限步计算后停止。

性质 1 MCG1 - 3 - 5 算法中的残量矩阵$\boldsymbol{R}_i$以及任意$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$满足

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}))=\mathrm{tr}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)$$

证明　由矩阵的迹运算性质可知

$\mathrm{tr}((\boldsymbol{R}_1^{(i)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1)=\mathrm{tr}((\boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1^{(i)})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(i)_1(\boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T}})$，由此可以推出

$$\mathrm{tr}((\boldsymbol{R}_1^{(i)})^{\mathrm{T}}g_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}))=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1^{(i)}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1^{(i)}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1^{(i)}\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{tr}((\boldsymbol{R}_2^{(i)})^{\mathrm{T}}g_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}))=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{(i)}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{(i)}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{(i)}\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right)$$

故 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}))=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{R}_1^{(i)},\boldsymbol{R}_2^{(i)})\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_i\right)$

由性质 1 可知，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{P}_1^{(j)},\boldsymbol{P}_2^{(j)},\boldsymbol{P}_3^{(j)}))=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_i)$。

性质 2　当 $j\geq 2$ 时，MCG1－3－5 算法中的矩阵 $\boldsymbol{Q}_i$，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_i$ 满足

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)+\beta_{j-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{j-1})$$

证明　由于 $\boldsymbol{Q}_i\in\Omega_{1-3-5}$，运用矩阵迹的性质可得

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i(\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j),$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(j)}\\\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(j)}\boldsymbol{S}\\\boldsymbol{P}\widetilde{R}_3^{(j)}\boldsymbol{P}\end{pmatrix}\right)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(j)})^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{S}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(j)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\\\boldsymbol{P}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(j)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\end{pmatrix})=\mathrm{tr}((\boldsymbol{P}_1^{(i)})^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(j)})^{\mathrm{T}}+$$

$$(\boldsymbol{P}_2^{(i)})^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(j)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}+$$

$$(\boldsymbol{P}_3^{(i)})^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(j)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(k+1)}+(\widetilde{\boldsymbol{R}}_1^{(k+1)})^{\mathrm{T}}\\\widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(k+1)}+\boldsymbol{S}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_2^{(k+1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\\\widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(k+1)}+\boldsymbol{P}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_3^{(k+1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\end{pmatrix}+$$

$$\beta_{j-1}\boldsymbol{Q}_{j-1}))=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)+\beta_{j-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{j-1})$$

性质 3　对于 MCG1－3－5 算法中的矩阵 $\boldsymbol{R}_i$，$\boldsymbol{Q}_i$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_i$，有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-a_i\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)$$

证明　由 MCG1－3－5 算法知

$g(\boldsymbol{X}^{(j+1)},\boldsymbol{Y}^{(j+1)},\boldsymbol{Z}^{(j+1)})=g(\boldsymbol{X}^{(j)},\boldsymbol{Y}^{(j)},\boldsymbol{Z}^{(j)})+a_jg(\boldsymbol{P}_1^{(j)},\boldsymbol{P}_2^{(j)},\boldsymbol{P}_3^{(j)})$

所以有 $\boldsymbol{G}-g(\boldsymbol{X}^{(j+1)},\boldsymbol{Y}^{(j+1)},\boldsymbol{Z}^{(j+1)})=\boldsymbol{G}-g(\boldsymbol{X}^{(j)},\boldsymbol{Y}^{(j)},\boldsymbol{Z}^{(j)})-a_jg(\boldsymbol{P}_1^{(j)},\boldsymbol{P}_2^{(j)},\boldsymbol{P}_3^{(j)})$

故 $\boldsymbol{R}_{j+1}=\boldsymbol{R}_j-a_jg(\boldsymbol{P}_1^{(j)},\boldsymbol{P}_2^{(j)},\boldsymbol{P}_3^{(j)})$，结合性质 1 可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{j+1})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-a_j\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{P}_1^{(j)},\boldsymbol{P}_2^{(j)},\boldsymbol{P}_3^{(j)}))=$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-a_j\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_i)$$

性质 4　设 $k\geqslant 2$，对 MCG1－3－5 算法中的矩阵 $\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{Q}_i$，有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j)=0,$$
$$(i\neq j,i,j=1,2,3,\cdots,k)\tag{2}$$

证明　类似性质 2 的证法，可证得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{R}_1)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)$，结合性质 3 可得

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1)-a_1\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1)=$$
$$\|\boldsymbol{R}_1\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\|\boldsymbol{Q}_1\|^2=0$$

利用性质 1 和性质 2 可得

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2)+\beta_1\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{P}_1^{(1)},\boldsymbol{P}_2^{(1)},\boldsymbol{P}_3^{(1)})+\beta_1\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=$$
$$\frac{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2))+\frac{\|\boldsymbol{R}_2\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=0$$

假设 $k=s(s\geqslant 2)$ 时，(2) 式成立，则当 $k=s+1(s\geq 2)$ 时，有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{s+1})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_s)-a_s\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{R}_s)=$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_s)-a_s\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_s-\beta_{s-1}\boldsymbol{Q}_{s-1}))=$$
$$\|\boldsymbol{R}_s\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_s\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_s)+\beta_{s-1}a_s\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{s-1})=0$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{s+1})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{R}_{s+1})+\beta_s\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_s)=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{P}_1^{(s)},\boldsymbol{P}_2^{(s)},\boldsymbol{P}_3^{(s)}))+\beta_s\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_s)=$$
$$\frac{\|\boldsymbol{Q}_s\|^2}{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_s-\boldsymbol{R}_{s+1}))+\frac{\|\boldsymbol{R}_{s+1}\|^2}{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{s-1})=0$$

当 $j=1$ 时，容易导出 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{s+1})=0$，$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{s+1})=0$，当 $j=2,3,4,\cdots,s-1$ 时，有

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{s+1})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_s)-a_s\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{T}\widetilde{\boldsymbol{R}}_j)=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_s)-a_s\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_j-\beta_{j-1}\boldsymbol{Q}_{j-1}))=0$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{s+1})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{s+1})+\beta_s\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_s)=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{P}_1^{(j)},\boldsymbol{P}_2^{(j)},\boldsymbol{P}_3^{(j)}))=$$
$$\frac{\|\boldsymbol{Q}_j\|^2}{\|\boldsymbol{R}_j\|^2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_j-\boldsymbol{R}_{j+1}))=$$
$$\frac{\|\boldsymbol{Q}_j\|^2}{\|\boldsymbol{R}_j\|^2}(\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{j+1}))=0$$

所以当 $k=s+1$ 时，(2) 式也成立。由归纳法原理可得 $1\leqslant j<i\leqslant k$ 时，(2) 式成立。又由矩阵迹的性质可知性质 4 成立。

性质 5　设 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ 是问题 Ⅰ 的任意一组解，则由 MCG1－3－5 算法得到的矩阵 $\boldsymbol{X}^{(k)}$，$\boldsymbol{Y}^{(k)}$，$\boldsymbol{Z}^{(k)}$，$\boldsymbol{Q}_k$ 及 $\boldsymbol{R}_k$ 满足

$$\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(k)}\\ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(k)}\\ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(k)}\end{pmatrix}\right)=\|\boldsymbol{R}_k\|^2\quad(k=1,2,3\cdots)\tag{3}$$

证明　当 $k=1$ 时，由

$$\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(1)}\\ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(1)}\\ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(1)}\end{pmatrix}\right)=$$
$$\operatorname{tr}\left(f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_1^{(1)},\boldsymbol{R}_2^{(1)})\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(1)}\\ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(1)}\\ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(1)}\end{pmatrix}\right)=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(1)},\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(1)}))=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}(g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})-g(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{Y}^{(1)},\boldsymbol{Z}^{(1)})))=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}(G-g(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{Y}^{(1)},\boldsymbol{Z}^{(1)})))=\|\boldsymbol{R}_1\|^2$$

假设，当 $k=i(i\geqslant2)$ 时，(3) 式成立，则当 $k=i+1$ 时，由

$$\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{Q}_{i+1}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(i+1)}\\ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(i+1)}\\ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(i+1)}\end{pmatrix}\right)=$$
$$\operatorname{tr}\left(f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_1^{(i+1)},\boldsymbol{R}_2^{(i+1)})\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(i+1)}\\ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(i+1)}\\ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(i+1)}\end{pmatrix}\right)+$$
$$\beta_i\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(i)}-a_i\boldsymbol{P}_1^{(i)}\\ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(i)}-a_i\boldsymbol{P}_2^{(i)}\\ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(i)}-a_i\boldsymbol{P}_3^{(i)}\end{pmatrix}\right)=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{i+1})+\beta_i\left[\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(i)}\\ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(i)}\\ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{(i)}\end{pmatrix}\right)-\right.$$
$$\left.a_i\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{(i)}\\ \boldsymbol{P}_2^{(i)}\\ \boldsymbol{P}_3^{(i)}\end{pmatrix}\right)\right]=\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{i+1})+$$
$$\beta_j[\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}a_i\boldsymbol{Q}_i)-a_i\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i)]=$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{i+1})=\|\boldsymbol{R}_{i+1}\|^2$$

由数学归纳法原理，可得性质 5 成立。

推论 1　设问题 Ⅰ 相容，则由 MCG1-3-5 算法得到的矩阵序列中，如果 $\boldsymbol{R}_i\neq\boldsymbol{O}$，那么 $\boldsymbol{Q}_i\neq\boldsymbol{O}(i=1,2,3,\cdots)$。

定理 1　设问题 Ⅰ 相容，对任意的初始矩阵 $(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{Y}^{(1)},\boldsymbol{Z}^{(1)})\in\Omega_{1-3-5}$，MCG1－3－5 算法可在有限步计算后得到问题 Ⅰ 的一组解，即矩阵方程组 (1) 的一组约束 1－3－5 解。

证明　若 $\boldsymbol{R}_i\neq\boldsymbol{O}(i=1,2,\cdots,2n^2)$，则由推论 1 知 $\boldsymbol{Q}_i\neq\boldsymbol{O}(i=1,2,\cdots,2n^2)$，从而由 MCG1－3－5 算法可以求得 $(\boldsymbol{X}^{(2n^2+1)},\boldsymbol{Y}^{(2n^2+1)},\boldsymbol{Z}^{(2n^2+1)})$ 和 $\boldsymbol{R}_{2n^2+1}$，由性质 4 知 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_{2n^2+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i)=0(i=1,2,\cdots,2n^2)$。因为 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=0(i,j=1,2,\cdots,2n^2;i\neq j)$，故 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_{2n^2}$ 是 $2n^2$ 维矩阵空间 $\boldsymbol{R}^{2n\times n}$ 的一组正交基，从而 $\boldsymbol{R}_{2n^2+1}=\boldsymbol{O}$，即为问题 Ⅰ 的解。

定理 2　问题 Ⅰ 不相容的充要条件是，在 MCG1－3－5 算法中存在某个 k，使得 $\boldsymbol{R}_k\neq\boldsymbol{O}$，而 $\boldsymbol{P}_i^{(k)}=\boldsymbol{O}$，$i=1,2,3$。

引理 1[11](25-27)　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^m$，若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数解唯一，且极小范数解在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 中，而在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 中只有 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解。

定理 3　设问题 Ⅰ 相容，对任意的 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，选取初始矩阵为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(1)}\\ \boldsymbol{Y}^{(1)}\\ \boldsymbol{Z}^{(1)}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} A_1^{\mathrm T}H_1B_1^{\mathrm T}+B_1H_1^{\mathrm T}A_1+A_2^{\mathrm T}H_2B_2^{\mathrm T}+B_2H_2^{\mathrm T}A_2 \\ C_1^{\mathrm T}H_1D_1^{\mathrm T}+C_2^{\mathrm T}H_2D_2^{\mathrm T}+S(C_1^{\mathrm T}H_1D_1^{\mathrm T}+C_2^{\mathrm T}H_2D_2^{\mathrm T})S \\ E_1^{\mathrm T}H_1F_1^{\mathrm T}+E_2^{\mathrm T}H_2F_2^{\mathrm T}+P(E_1^{\mathrm T}H_1F_1^{\mathrm T}+E_2^{\mathrm T}H_2F_2^{\mathrm T})P \end{pmatrix} \quad (4)$$

则 MCG1-3-5 算法可在有限步计算后得到问题Ⅰ的唯一极小范数解，即矩阵方程组(1)的唯一极小范数约束 1-3-5 解。

1.2　问题Ⅱ的解

当问题Ⅰ相容时，其解集合 S_E 非空，取 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in S_E$，由对称矩阵与反对称矩阵的正交性知

$$\left\|\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X_0\\Y_0\\Z_0\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\Y_0+Y_0^{\mathrm T}\\Z_0+Z_0^{\mathrm T}\end{pmatrix}\right\|^2+\left\|\frac12\begin{pmatrix}X_0^{\mathrm T}-X_0\\Y_0^{\mathrm T}-Y_0\\Z_0^{\mathrm T}-Z_0\end{pmatrix}\right\|^2$$

令 $\boldsymbol{K}=\frac12(\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm T})$，由中心对称矩阵与中心反对称矩阵的正交性知

$$\left\|\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\Y_0+Y_0^{\mathrm T}\\Z_0+Z_0^{\mathrm T}\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\K+SKS\\Z_0+Z_0^{\mathrm T}\end{pmatrix}\right\|^2+\left\|\frac12\begin{pmatrix}O\\SKS-K\\O\end{pmatrix}\right\|^2$$

令 $\boldsymbol{T}=\frac12(\boldsymbol{Z}_0+\boldsymbol{Z}_0^{\mathrm T})$，由自反矩阵与反自反矩阵的正交性知

$$\left\|\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\K+SKS\\Z_0+Z_0^{\mathrm T}\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\K+SKS\\T+PTP\end{pmatrix}\right\|^2+\left\|\frac12\begin{pmatrix}O\\O\\PTP-T\end{pmatrix}\right\|^2$$

则求问题Ⅱ的解等价于求 $(\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{Y}},\hat{\boldsymbol{Z}})\in S_E$，使得

$$\left\|\begin{pmatrix}\hat X\\\hat Y\\\hat Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\K+SKS\\T+PTP\end{pmatrix}\right\|=$$

$$\min\left\{\left\|\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\K+SKS\\T+PTP\end{pmatrix}\right\|(X,Y,Z)\in S_E\right\}$$

令

$$\begin{pmatrix}\widetilde X\\\widetilde Y\\\widetilde Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\K+SKS\\T+PTP\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{G}_i=G_i-\frac12(A_i(X_0+X_0^{\mathrm T})B_i+C_i(K+SKS)D_i+E_i(T+PTP)F_i)\qquad(i=1,2)$$

则求解问题Ⅱ等价于求矩阵方程组

$$A_i\widetilde{X}B_i+C_i\widetilde{Y}D_i+E_i\widetilde{Z}F_i=\widetilde{G}_i\qquad(i=1,2)\qquad(5)$$

的极小范数约束 1-3-5 解 $(\widetilde{\boldsymbol{X}}^*,\widetilde{\boldsymbol{Y}}^*,\widetilde{\boldsymbol{Z}}^*)$。

按照(4)式选取初始矩阵，用 MCG1 - 3 - 5 算法得到矩阵方程组(5)的唯一极小范数解 $(\widetilde{\boldsymbol{X}}^*,\widetilde{\boldsymbol{Y}}^*,\widetilde{\boldsymbol{Z}}^*)$，由此得到问题 Ⅱ 的解为

$$\begin{pmatrix}\hat X\\\hat Y\\\hat Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde X^*\\\widetilde Y^*\\\widetilde Z^*\end{pmatrix}+\frac12\begin{pmatrix}X_0+X_0^{\mathrm T}\\K+SKS\\T+PTP\end{pmatrix}\qquad(6)$$

2　数值算例

在结构动力模型修正的问题中，需要求三矩阵变量的矩阵方程组的约束解及其最佳逼近问题，方程组如下

$$\begin{cases}XA_1+YB_1+ZC_1=W_1\\XA_2+YB_2+ZC_2=W_2\end{cases}\qquad(7)$$

用本文建立的 MCG1-3-5 算法求矩阵方程组(7)的一组约束 1-3-5 解和极小范数约束 1-3-5 解，并在 S_E 中求给定矩阵 $\boldsymbol{X}^{(0)},\boldsymbol{Y}^{(0)},\boldsymbol{Z}^{(0)}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 的最佳逼近矩阵，其中

$$A_1=\begin{pmatrix}2&-6&-3&3&\cdots&3\\-2&2&-6&-3&\ddots&\vdots\\2&-2&\ddots&\ddots&\ddots&3\\3&2&\ddots&2&-6&-3\\\vdots&\ddots&\ddots&-2&2&-6\\3&\cdots&3&2&-2&2\end{pmatrix}_{4n\times4n},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1&2&2&2&\cdots&2\\2&1&2&2&\ddots&\vdots\\2&2&\ddots&\ddots&\ddots&2\\2&2&\ddots&1&2&2\\\vdots&\ddots&\ddots&2&1&2\\2&\cdots&2&2&2&1\end{pmatrix}_{4n\times4n}$$

$$C_1=\begin{pmatrix}3&-5&3&2&\cdots&2\\-1&3&-5&3&\ddots&\vdots\\2&-1&\ddots&\ddots&\ddots&2\\2&2&\ddots&3&-5&3\\\vdots&\ddots&\ddots&-1&3&-5\\2&\cdots&2&2&-1&3\end{pmatrix}_{4n\times4n},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}2&1&-1&8&\cdots&8\\-9&2&1&-1&\ddots&\vdots\\2&-9&\ddots&\ddots&\ddots&8\\8&2&\ddots&2&1&-1\\\vdots&\ddots&\ddots&-9&2&1\\8&\cdots&8&2&-9&2\end{pmatrix}_{4n\times4n}$$

$$B_2=-C_1,C_2=B_1,X_0=(x_{ij})_{4n\times4n},$$

$$X_1=2(x_{ij})_{4n\times4n},x_{ij}=1,\varepsilon=10^{-10}(\text{终止准则})$$

$$W_1=X_0A_1+X_0B_1+X_0C_1,$$

$$W_2=X_1A_2+X_1B_2+X_1C_2$$

1)选取初始约束 1-3-5 矩阵 $X_1^{(1)}=X_0,Y_1^{(1)}=Z_1^{(1)}=I_{4n\times4n}$,按照 MCG1-3-5 算法求得矩阵方程组(7)的一组约束 1-3-5 解,计算时间(s)、迭代次数、实际误差以及解矩阵的范数结果如表 1(Matlab 软件 2014 版,PIV3.0GHZ 微机,下同)。

表 1 约束 1-3-5 解的计算结果

Tab.1 Results of constrained matrices 1-3-5

$4n$	计算时间/s	迭代次数	实际误差	解矩阵范数
8	0.020 4	309	9.051 5e-10	113.188 9
12	0.095 2	111 0	9.101 0e-10	243.462 7
16	0.268 7	254 5	9.743 7e-10	329.488 8
20	0.666 5	479 3	9.421 3e-10	533.427 2

2)在式(4)中,取 $H_1=(a_{ij})_{4n\times4n},H_2=2H_1$,$a_{ij}=1$,选取初始约束 1-3-5 矩阵,按照 MCG1-3-5 算法,可求得矩阵方程组(7)的极小范数约束 1-3-5 解,计算时间(s)、迭代次数、实际误差及解矩阵的范数结果如表 2。

表 2 极小范数约束 1-3-5 解的计算结果

Tab.2 Results of constrained matrices 1-3-5 with a minimal norm

$4n$	计算时间/s	迭代次数	实际误差	解矩阵范数
8	0.020 2	312	8.747 1e-10	113.183 4
12	0.109 1	111 3	8.808 3e-10	243.455 3
16	0.247 6	253 8	9.990 2e-10	329.486 3
20	0.631 3	480 1	9.706 6e-10	533.425 0

3)给定矩阵 $X_1^{(0)}=A_1+C_1,Y_1^{(0)}=B_1-I_{4n}$,$Z_1^{(0)}=A_1+B_1$,对矩阵方程组(7)取初始矩阵 $\widetilde{X}_1^{(1)},\widetilde{Y}_1^{(1)},\widetilde{Z}_1^{(1)}$ 同(2)的初始矩阵。按照 MCG1-3-5 算法求得其极小范数约束 1-3-5 解,由式(6)可求得给定矩阵在 S_E 中的最佳逼近矩阵,计算时间(s)、迭代次数、误差、解矩阵的范数及逼近误差结果如表 3。

表 3 给定矩阵的最佳逼近矩阵的计算结果

Tab.3 Results of the optimal approximation matrix of the given matrix

$4n$	计算时间/s	迭代次数	实际误差	逼近误差
8	0.019 7	308	8.031 3e-10	119.880 3
12	0.090 3	112 5	8.259 6e-10	257.258 2
16	0.258 8	256 7	7.699 2e-10	350.397 5
20	0.632 0	481 8	9.807 9e-10	558.534 8

3 结论

建立的求 3 个未知矩阵的矩阵方程组异类约束解的迭代算法 MCG1-3-5,是对求线性矩阵方程组同类约束解的迭代算法的拓展,该算法可以判断矩阵方程组的异类约束解是否存在,而且具备有限步收敛性。数值算例表明,该算法是可行的。通过增加矩阵方程组中矩阵变量的个数和方程的个数,采用类似的方法,可以建立求其他矩阵方程组的异类约束解的迭代算法。

参考文献:

[1] 盛兴平, 苏友峰, 陈果良. 矩阵方程 $A^TXB+B^TX^TA=D$ 的极小范数最小二乘解的迭代算法[J]. 高等学校计算数学学报, 2008, 30(4): 352-362.

[2] 郑凤芹, 张凯院. 求多变量线性矩阵方程组自反解的迭代算法[J]. 数值计算与计算机应用, 2010, 31(1): 39-54

[3] DEHGHAN M, HAJARIAN M. An iterative method for solving the generalized coupled sylvester matrix equations over generalized bisymmetric matrices[J]. Applied Mathematical Modeling, 2009, 34(3): 639-654.
[4] 张凯院, 袁飞. 求一般线性矩阵方程对称解得修正共轭梯度法[J]. 高等学校计算数学学报, 2011, 33(3): 215-224.
[5] 张骞, 周蕾, 袁永新. 求解矩阵方程的一种迭代法[J]. 湖北师范大学学报(自然科学版), 2017,37(1):61-66.
[6] 杜丹丹, 肖宪伟, 彭振赟. 迭代法求解约束矩阵方程 $AXB + CYD = E$ [J]. 数学理论与应用, 2016, 36(1): 61-72.
[7] 解培月, 张凯院. 特殊双变量矩阵方程组异类约束解的 MCG 算法[J]. 数学杂志,2012, 32(4): 649-657.
[8] 武见, 张凯院. 多变量矩阵方程异类约束解的修正共轭梯度算法[J]. 工程数学学报,2012, 29(1): 112-116.
[9] 李书连, 张凯院, 刘晓敏. 一类矩阵方程异类约束解与 LS 解的迭代算法[J]. 高校应用数学学报, 2012, 27(3): 313-324.
[10] 刘晓敏, 张凯院. 双变量 LMES 一种异类约束最小二乘解的 MCG 算法[J]. 高校应用数学学报, 2011, 34(5): 938-948.
[11] 张凯院, 徐仲. 数值代数[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2010.

(责任编辑: 陈雯)

(上接第 360 页)

参考文献:

[1] 邹志刚. 光催化材料与太阳能转化和环境净化[J]. 功能材料信息, 2008, 5(4): 17-19.
[2] 李敦钫, 郑菁, 陈新益, 等. 光催化分解水体系和材料研究[J]. 化学进展, 2007, 19(4): 454-477.
[3] 罗晓良. 室内甲醛释放规律及其控制研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2006: 1-5.
[4] 王继峰. 室内空气中甲醛污染现状及其防治对策[J]. 甘肃科技, 2010, 26(9): 90-91.
[5] 张琴, 陈兆文, 范海明, 等. 新装修居室甲醛污染状况及控制分析[J]. 舰船防化, 2010(4): 6-9.
[6] ZHANG J, WU J, LU P, et al. The effect of pH on synthesis of BiOCl and its photocatalytic oxidization performance[J]. Materials Letters, 2017, 186: 353-356.
[7] SUN J F, WANG J Q, LI Z P, et al. Assembly and electrochemical properties of novel alkaline rechargeable Ni/Bi battery using $Ni(OH)_2$ and $(BiO)_4CO_3(OH)_2$ microspheres as electrode materials[J]. Journal of Power Sources, 2015, 274: 1070-1075.
[8] JIANG J, ZHAO K, XIAO X Y, et al. Synthesis and facet-dependent photoreactivity of BiOCl single-crystalline nanosheets [J]. Jouranl of American Chemical Society, 2013, 134(10): 4473-4476.
[9] LIU H M, YE H J, LIAN Z W. Experimental study of photocatalytic oxidation of formaldehyde and its by-products[J]. Research on Chemical Intermediates, 2006, 32(1): 9-16.

(特约编辑:黄家瑜)