doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2017.04.011

指数波形松弛方法

范振成

(闽江学院 数学系, 福建 福州 350108)

摘要: 结合常微分方程的指数方法和波形松弛方法, 建立指数波形松弛方法。然后证明了该方法是收敛的。最后通过算例与显式欧拉方法、指数方法和波形松弛方法进行对比。结果表明,对于弱耦合的大系统, 指数波形松弛方法具有一定优势。

关键词: 刚性微分方程; 指数方法; 波形松弛方法

中图分类号: O241.81　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1672-4348(2017)04-0364-03

Exponential waveform relaxation methods

Fan Zhencheng

(Mathematics Department, Minjiang University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: Firstly, the exponential waveform relaxation methods (EWRMs) for ordinary differential equations are established by combining the exponential methods (EMs) and the waveform relaxation methods (WRMs). Secondly, the convergence of the EWRMs is confirmed. Lastly, numerical experimentation is conducted to make a comparison among the explicit Euler methods, EMs and WRMs. The results indicate that the EWRMs are advantageous for large weakly coupled systems of ordinary differential equations.

Keywords: stiff differential equation; exponential method; waveform relaxation method

刚性方程是一类重要的常微分方程[1]。大多数刚性方程没有解析解, 建立数值方法求近似解是必要的。常微分方程的数值方法可以分为显式和隐式两类。大量理论研究和实际应用表明: 显式方法不适合刚性方程, 一般用隐式方法求解[2]。然而,隐式方法将导致非线性方程组, 求解非线性方程组(尤其大方程组)是一个艰巨的任务。指数方法先通过指数型变换弱化系统的刚性, 进而可以用显式方法达到较理想的计算结果[3-4]。而当系统规模太大时,前述 3 种办法都可能超出容许度。波形松弛方法是为了求解大系统而建立的,它具有并行性和多速率性两个优点,适用于由一些子系统弱耦合而成的大系统[5-6]。

对于大的刚性系统, 单独的指数方法和波形松弛方法都不理想, 前者不适用大系统, 后者难以处理刚性问题。本文的指数波形松弛方法将两种方法结合, 利用波形松弛方法分解计算, 利用指数方法弱化刚性, 兼具两种方法的优点。

1　指数波形松弛方法

考虑刚性初值问题:

$$x'(t)=f(t,x(t)),t\geq 0;x(0)=x_0$$

使用分割

$$f(t,x(t))=Ax+f(t,x(t))-Ax=Ax+g(t,x(t))$$

这里要求 $g(t,x(t))$ 具有小 Lipschitz 常数,线性部分 Ax 一般通过对 $f(t,x(t))$ 线性化获得。

建立波形松弛方法

收稿日期: 2017-03-14
基金项目: 福建省自然科学基金(2015J01588);福建省设区市属高校科研专项(JK2014041)
通讯作者: 范振成(1971-),男,黑龙江依安人,教授,博士,研究方向:随机微分方程数值方法。

$$\left.\begin{array}{r} x^{(0)}(t) \equiv x_0 \\ \left.\begin{array}{r} x^{(k+1)}(0) = x_0 \\ \dot{x}^{(k+1)}(t) = Ax^{(k+1)}(t) + g(t, x^{(k)}(t)) \end{array}\right\} k = 0,1,\cdots \end{array}\right\}$$

上式最后一个方程两边同乘 e^{-At} 得

$$e^{-At}\dot{x}^{(k+1)}(t) - e^{-At}Ax^{(k+1)}(t) = e^{-At}g(t, x^{(k)}(t))$$

进而有

$$(e^{-At}x^{(k+1)}(t))' = e^{-At}g(t, x^{(k)}(t)) \qquad (1)$$

令 $T > 0$，取 $[0,T]$ 上步长为 h 的等距节点集 $\{t_0, t_1, \cdots, t_N\}$，其中，

$t_0 = 0, t_N = T, h = T/N, t_{i+1} = t_i + h, i = 0,1,\cdots, N-1$。

式(1)两端从 t_n 到 t_{n+l} 积分得

$$e^{-At_{n+l}}x^{(k+1)}(t_{n+l}) = e^{-At_n}x^{(k+1)}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+l}} e^{-At}g(t, x^{(k)}(t))\,dt$$

用 Newton-Cotes 公式近似上式中的定积分(见文献[7])

$$e^{-At_{n+l}}x^{(k+1)}(t_{n+l}) = e^{-At_n}x^{(k+1)}(t_n) + lh\sum_{i=0}^{l} C_l^i e^{-At_{n+i}}g(t_{n+i}, x^{(k)}(t_{n+i})) + O(h^p) \qquad (2)$$

其中，p 为 Newton－Cotes 公式的收敛阶，C_n^i 为 Cotes 系数。

用 $x_n^{(k)}$ 代替 $x^{(k)}(t_n)$，舍去余项，得到指数波形松弛方法

$$\left.\begin{array}{r} x_n^{(0)} \equiv x_0, n = 0,1,\cdots,N \\ \left.\begin{array}{r} x_0^{(k+1)} = x_0 \\ x_{n+l}^{(k+1)} = e^{Ah}x_n^{(k+1)} + lh\sum_{i=0}^{l} C_l^i e^{A(l-i)h}g(t_{n+i}, x_{n+i}^{(k)}) \\ n = 0,1,\cdots,N-l \end{array}\right\} k = 0,1,\cdots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

当 $l = 1$ 时，此方法为单步法。当 $l > 1$ 时，此方法为多步法，初始值 $x_j^{(k+1)}, j = 1,2,\cdots,l-1$ 一般需用同阶的单步法获得。本文不讨论初始值的计算问题。

2　收敛性证明

引理[7]：设 $\{c_j\}$ 为实数列，满足

$$c_{j+1} \leqslant a_j c_j + b_j, j = 0,1,\cdots,m-1$$

其中，$a_j > 0, b_j \in \Re$，则 $c_j \leqslant E_j (j = 0,1,\cdots,m)$，其中，

$$E_j = \left(\prod_{k=0}^{j-1} a_k\right) c_0 + \prod_{k=0}^{j-1}\left(\prod_{l=k+1}^{j-1} a_l\right) b_k, \ j = 0,1,\cdots,m$$

定理：假设函数 g 满足 Lipschitz 条件，即存在 L 使得对所有 $x_1, x_2 \in \Re$

$$|g(t, x_1) - g(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \qquad (4)$$

记 $\delta_n^{(k)} = |x_n^{(k)} - x^{(k)}(t_n)|$。对任意正整数 q，如果初始值满足

$$\max_{0 \leqslant n < l} \delta_n^{(k)} = O(h^{p-1}), k = 0,1,\cdots,q \qquad (5)$$

那么

$$\max_{l \leqslant n \leqslant N} \delta_n^{(k)} = O(h^{p-1}), k = 0,1,\cdots,q \qquad (6)$$

证明：显然 $k = 0$ 时，式(6)成立。只需证明对所有 $0 \leqslant k \leqslant q-1$，当 $\max\limits_{l \leqslant n \leqslant N} \delta_n^{(k)} = O(h^{p-1})$ 时，$\max\limits_{l \leqslant n \leqslant N} \delta_n^{(k+1)} = O(h^{p-1})$ 亦成立。由式(2)、(3)有

$$\delta_{n+l}^{(k+1)} \leqslant e^{|A|h}\delta_n^{(k+1)} + lh\sum_{i=0}^{l} C_l^i e^{|A|(l-i)h}|g(t_{n+i}, x^{(k)}(t_{n+i})) - g(t_{n+i}, x_{n+i}^{(k)})| + O(h^p)$$

由式(4)、(5)和归纳假设有

$$\delta_{n+l}^{(k+1)} \leqslant e^{|A|h}\delta_n^{(k+1)} + O(h^p), n = 0,1,\cdots,N-l \qquad (7)$$

令 $m = \lfloor \frac{N}{l} \rfloor$，$\lfloor \cdot \rfloor$ 表示截尾取整函数。令 $\varepsilon_j^{(k+1)} = \max\limits_{jl \leqslant n < (j+1)l} \delta_n^{(k+1)}, j = 0,1,\cdots,m$。为方便，假设 $N = (m+1)l$。由式(7)得

$$\varepsilon_{j+1}^{(k+1)} \leqslant e^{|A|h}\varepsilon_j^{(k+1)} + O(h^p), \ j = 0,1,\cdots,m-1$$

记 $c_j = \varepsilon_j^{(k+1)}, a_j = e^{|A|h}, b_j = O(h^p)$。根据引理

$$E_j = \left(\prod_{k=0}^{j-1} e^{|A|h}\right)\varepsilon_0^{(k+1)} + \prod_{k=0}^{j-1}\left(\prod_{l=k+1}^{j-1} e^{|A|h}\right)O(h^p) = e^{|A|jh}\max_{0 \leqslant i < l}\delta_i^{(k+1)} + \frac{e^{|A|jh} - 1}{e^{|A|h} - 1}O(h^p) = O(h^{p-1}), \ j = 0,1,\cdots,m$$

由引理得

$$\max_{l \leqslant n \leqslant N} \delta_n^{(k+1)} = O(h^{p-1})$$

3　数值实验

通过数值实验对比指数波形松弛方法与 3 种

传统方法：显式欧拉方法、指数方法、波形松弛方法。为简单使用线性实验方程，并且所有方法都基于显式欧拉方法。

考虑初值问题

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x)=\begin{pmatrix}100 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}x(t),0\leqslant t\leqslant 0.1\\ x(0)=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^{\mathrm T}\end{cases} \tag{8}$$

此方程解的第一分量变化快，其余 3 个分量变化慢，这是刚性方程。记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}100 & & & \\ & 4 & & \\ & & 3 & \\ & & & 2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

使用分割 $f(t,x)=\boldsymbol{A}x+g(t,x)=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}x$. 取步长 $h=0.001$, $N=0.1/h=100$, $x_0=x(0)$。方程(8)的显式欧拉方法为

$$x_{n+1}=x_n+h(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})x_n,n=0,1,\cdots,N-1 \tag{9}$$

基于显式欧拉方法的指数方法、波形松弛方法和指数波形松弛方法分别为

$$x_{n+1}=\mathrm{e}^{Ah}x_n+h\mathrm{e}^{Ah}\boldsymbol{B}x_n,n=0,1,\cdots,N-1 \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_n^{(0)}\equiv x_0,n=0,1,\cdots,N\\ \left.\begin{array}{r} x_0^{(k+1)}=x_0\\ x_{n+1}^{(k+1)}=x_n^{(k+1)}+h(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})x_n^{(k)},n=0,1,\cdots,N-1\end{array}\right\} k=0,1,\cdots\end{array}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_n^{(0)}\equiv x_0,n=0,1,\cdots,N\\ \left.\begin{array}{r} x_0^{(k+1)}=x_0\\ x_{n+1}^{(k+1)}=\mathrm{e}^{Ah}x_n^{(k+1)}+h\mathrm{e}^{Ah}\boldsymbol{B}x_n^{(k)},n=0,1,\cdots,N-1\end{array}\right\} k=0,1,\cdots\end{array}\right\} \tag{12}$$

表 1 在 $t=0.1$ 处方程(8)的精确解的值和数值方法(9)～(12)的计算值

Tab.1 The value of the exact solution and approximate solutions generated by(9)～(12) at $t=0.1$ for equation(8)

方法	方法(9)	方法(10)	方法(11) (迭代 3 次)	方法(12) (迭代 3 次)	精确解
$t=0.1$ 处的计算值	14 214.243	22 753.147	14 214.237	22 753.138	22 719.597
	1.646 441 0	1.648 397 2	1.646 363 2	1.648 318 4	1.648 484 1
	1.639 781 2	1.641 460 0	1.639 643 9	1.641 321 2	1.641 712 4
	1.504 398 3	1.505 387 8	1.504 248 6	1.505 236 6	1.505 830 5

方法(9)～(12)都是显式方法，一般情况显式方法不能用来求解刚性问题。从表 1 中数据可以看出显式欧拉方法(9)、波形松弛方法(11)的计算结果误差较大，而同样步长的指数波形松弛方法(12)和指数方法(10)计算结果较准确，说明建立的指数波形松弛方法一定程度上克服了显式方法的缺点，可以用于求解刚性方程。方法(12)需要迭代 3 次，计算量比方法(10)大，但方法(12)继承了波形松弛方法的优点，即通过选择适当的分割函数(比如块对角矩阵)，可以将计算任务分解成若干独立的小任务，进而在不同的处理器上同时完成，而且允许在不同处理器上使用不同方法，因而比方法(10)更适合弱耦合的大系统。

参考文献：

[1] 袁兆鼎，费景高，刘德贵.刚性常微分方程初值问题的数值解法[M].北京：科学出版社，1987.

[2] Dekker K，Verwer J G. Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equatons[M]. Amsterdam：Elsevier Science Ltd，1984.

(下转第 370 页)

4 结论

(1)将 ELM 模型应用于短期负荷时间序列预测中,取得了较高的预测精度,表明 ELM 模型在短期负荷预测中应用的可行性和有效性。

(2)本研究在对负荷时间序列进行样本构建时,其嵌入维数是根据经验来进行选取的,在实际中由于负荷时间序列具有混沌特性,可进一步通过相空间重构计算来选取最佳嵌入维数,这将在下一步的研究中予以实现。

(3)所采用的 ELM 模型预测精度虽较 BP 神经网络模型为高,但其本质仍然是一种基于经验风险最小化原则的进化神经网络,为此需利用结构风险最小化原则对其进行进一步改进,以提升其预测精度和泛化能力。

参考文献:

[1] 康重庆,夏清,刘梅.电力系统负荷预测[M].北京:中国电力出版社,2007.

[2] 张思远,何光宇,梅生伟,等.基于相似时间序列检索的超短期负荷预测[J].电网技术,2008,32(12):56-59.

[3] 李明干,孙健利,刘沛.基于卡尔曼滤波的电力系统短期负荷预测[J].继电器,2004,32(4):9-12.

[4] 向峥嵘,王学平.基于小波-神经网络的电力系统短期负荷预测[J].系统仿真学报,2008,20(18):5018-5020.

[5] 李元诚 ,方廷健,于尔铿. 短期负荷预测的支持向量机方法研究[J].中国电机工程学报,2003,23 (6) :55-59.

[6] Huang G B, Zhu Q Y, Siew C K. Extreme learning machine: theory and applications[J]. Neurocomputing,2006,70(1/3):489-501.

[7] 邓万宇,郑庆华,陈琳.神经网络极速学习方法[J].计算机学报,2010,33(2):279-287.

(责任编辑:肖锡湘)

(上接第 366 页)

[3] Hochbruck M, Ostermann A. Exponential multistep methods of Adams-type[J]. Numerical Mathematics, 2011, 51(4):889-908.

[4] Xu Y, Zhao J J, Sui Z N. Exponential Runge-Kutta methods for delay differential equations[J]. Mathematics and Computers in Simulation,2010,80(12):2350-2361.

[5] Hout K J.On the convergence of waveform relaxation methods for stiff nonlinear ordinary differential equations[J].Applied Numerical Mathematics,1995,18(1):175-190.

[6] Zhou S, Huang T Z. Convergence of waveform relaxation methods for Hermitian positive definite linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,203(2):943-952.

[7] 张平文,李铁军.数值分析[M].北京:北京大学出版社, 2007.

(责任编辑:陈雯)