

doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2017.03.020

# 一类带 Gilpin-Ayala 增长率的时滞计算机病毒模型

施键兰<sup>1</sup>, 余赞平<sup>2</sup>

(1.福建农林大学 东方学院, 福建 福州 350017;  
2.福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350117)

**摘要:** 研究了一类带 Gilpin-Ayala 增长率的时滞计算机网络病毒传播模型。通过分析模型特征方程及考虑时滞对系统动力学行为的影响,得到模型的平衡点稳定及 Hopf 分岔产生的条件。数值模拟验证出所得理论分析结果的正确性。

**关键词:** 计算机病毒; Gilpin-Ayala 增长率; 稳定性; Hopf 分岔; 时滞

**中图分类号:** TP309.5      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-4348(2017)03-0301-06

## A time delayed computer virus model with Gilpin-Ayala growth rate

Shi Jianlan<sup>1</sup>, Yu Zanping<sup>2</sup>

(1. Dongfang College, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350017, China;  
2. College of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China)

**Abstract:** In this paper, a time-delay viral infection model in computer networks with Gilpin-Ayala growth rate was investigated. By analysing the associated characteristic equation and the impact of the time delay on the dynamical behaviour of a system, the conditions of equilibrium stability and the production of Hopf bifurcation were obtained. Numerical simulations confirm the theoretical results.

**Keywords:** computer virus; Gilpin-Ayala growth rate; stability; Hopf bifurcation; time delay

计算机病毒的自我复制及传播行为和种群中流行病传播十分相似。1990 年初, Kephart 等人第一次借助生物学领域已有的数学模型来对计算机病毒进行研究, 提出经典的 SIS 病毒模型<sup>[1]</sup>。在此基础上, 不少学者对计算机病毒传播模型加以改进并进行研究<sup>[2-8]</sup>; Ren 等<sup>[8]</sup>考虑了易感染节点数量符合 logistic 增长, 讨论了平衡点的动力学性质。

对于(时滞)微分方程描述的连续系统, 如果参数通过某一数值时平衡点的稳定性发生了改变, 且在平衡点附近产生了周期轨, 那么称这样的分岔为连续系统的 Hopf 分岔。由于 Gilpin-Ayala 增长率比 logistic 增长率更加符合实际中的种群

增长情形<sup>[9]</sup>, 本研究在文献[8]基础上, 提出了一种带 Gilpin-Ayala 增长率的时滞计算机网络病毒传播模型, 通过分析相应特征方程根的分布对其进行稳定性和 Hopf 分岔分析。

## 1 模型建立

假设将网络中一台计算机主机或路由器看作一个节点。节点分为易感染节点、感染节点和免疫节点。以  $S(t)$  表示  $t$  时刻未感染病毒的易感染节点数;  $I(t)$  表示  $t$  时刻已感染病毒的感染节点数;  $R(t)$  表示  $t$  时刻对病毒具有免疫能力的免疫节点数。根据上述假设, 建立如下 SIR 计算机病毒传播动力学模型:

收稿日期: 2017-03-30

通讯作者: 施键兰(1984-), 女, 福建福州人, 讲师, 硕士, 研究方向: 计算机模型。

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = r \left( 1 - \frac{S^2(t)}{K^2} \right) S(t) - \beta S(t) I(t - \tau) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t - \tau) - \alpha I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \alpha I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\beta$  表示易感染节点与感染节点的传染率系数, 假设易感染节点数量符合 Gilpin-Ayala 增长,  $r$  是内禀增长率,  $K$  是网络最大容纳量,  $\mu$  表示节点自然死亡系数,  $\alpha$  表示节点的免疫状态返回到易感染状态的概率,  $\tau$  表示病毒的潜伏期, 即节点感染病毒到病毒发作的时间间隔。

由于系统前 2 个方程不含有  $R$  变量, 故可考虑如下系统

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = r \left( 1 - \frac{S^2(t)}{K^2} \right) S(t) - \beta S(t) I(t - \tau) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t - \tau) - \alpha I(t) - \mu I(t) \end{cases} \quad (2)$$

系统(2)存在一个平凡零解  $E_0^0 = (0, 0)$ , 一个无病平衡点  $E_0 = (K, 0)$ 。

记基本再生数  $R_0 = \frac{K^2 \beta^2}{(\alpha + \mu)^2}$ , 当  $R_0 > 1$  时, 系统(2)还存在另外一个地方病平衡点

$$E_* = \left( \frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{r}{\beta} - \frac{r(\alpha + \mu)^2}{K^2 \beta^3} \right)$$

## 2 稳定性分析

设  $E = (\tilde{S}, \tilde{I})$  为系统(2)的一个平衡点, 则其相对应的线性化系统的雅可比矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda - r + \frac{3r\tilde{S}^2}{K^2} + \beta\tilde{I} & \beta\tilde{S}e^{-\lambda\tau} \\ -\beta\tilde{I} & \lambda + \alpha + \mu - \beta\tilde{S}e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0$$

### 2.1 平凡零解的稳定性

**定理 1** 系统(2)在平凡零解  $E_0^0 = (0, 0)$  是不稳定的。

**证明** 系统(2)在  $E_0^0$  处的特征方程为

$$(\lambda - r)(\lambda + \alpha + \mu) = 0$$

解得  $\lambda_1 = r > 0$ ,  $\lambda_2 = -\alpha - \mu < 0$ 。

所以  $E_0^0$  是不稳定的。

### 2.2 无病平衡点的稳定性

**定理 2** 系统(2)的无病平衡点  $E_0 = (K, 0)$

(1) 当  $R_0 < 1$  时是局部渐近稳定的;

(2) 当  $R_0 > 1$  时是不稳定的。

**证明** 系统(2)在  $E_0$  处的特征方程为

$$(\lambda + 2r)(\lambda - K\beta e^{-\lambda\tau} + \alpha + \mu) = 0 \quad (3)$$

(3) 式有一个负实根  $\lambda_1 = -2r < 0$  和满足下式的根

$$F(\lambda) = \lambda - K\beta e^{-\lambda\tau} + \alpha + \mu = 0 \quad (4)$$

(1) 当  $R_0 < 1$ ,  $\tau = 0$  时, 得到(4)式的根

$$\lambda = K\beta - \alpha - \mu < 0。$$

当  $R_0 < 1$ ,  $\tau > 0$  时, 假设(4)式的根为

$\lambda = i\varpi$  ( $\varpi > 0$ ), 代入(4)式分离实虚部得到

$$\begin{cases} K\beta \cos \varpi \tau = \alpha + \mu \\ K\beta \sin \varpi \tau = -\varpi \end{cases} \quad (5)$$

求解(5)式可得

$$\varpi^2 = K^2 \beta^2 - (\alpha + \mu)^2 \quad (6)$$

当  $R_0 < 1$ , 方程(6)没有正根  $\varpi$ , 这说明当  $\tau \geq 0$  时(4)式  $F(\lambda) = 0$  的所有根  $\lambda$  都具有负实部, 所以系统(2)在无病平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的。

(2) 当  $R_0 > 1$  时, (4)式  $F(0) < 0$ ,  $F(+\infty) = +\infty$ , 所以  $F(\lambda) = 0$  至少有一个正实根, 系统(2)在无病平衡点  $E_0$  是不稳定的。

### 2.3 地方病平衡点的稳定性

**定理 3** 系统(2)的地方病平衡点

$$E_* = \left( \frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{r}{\beta} - \frac{r(\alpha + \mu)^2}{K^2 \beta^3} \right) \text{ 当 } 1 < R_0 <$$

5 时是局部渐近稳定的。

**证明** 系统(2)在  $E_*$  处的特征方程为

$$\lambda^2 + \left( c + 2 \frac{r}{R_0} \right) \lambda + 2c \frac{r}{R_0} = e^{-\lambda\tau} \left( c\lambda + 3c \frac{r}{R_0} - cr \right) \quad (7)$$

这里  $c = \alpha + \mu$ 。

当  $\tau = 0$  时, (7)式变为

$$\lambda^2 + 2 \frac{r}{R_0} \lambda + cr \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) = 0 \quad (8)$$

由于  $R_0 > 1$ , 得到  $2 \frac{r}{R_0} > 0$ ,  $cr \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) > 0$ 。

由 Hurwitz 判据可得特征方程(8)的根的实部均为负, 因此系统(2)当  $R_0 > 1$ ,  $\tau = 0$  时在地方病平衡点  $E_*$  是局部渐近稳定的。

当  $\tau > 0$  时, 假设(7)式的根为  $\lambda = i\varpi$  ( $\varpi > 0$ ), 代入(7)式分离实虚部得到

$$\begin{cases} -\varpi^2 + 2c \frac{r}{R_0} = \left(3c \frac{r}{R_0} - cr\right) \cos \varpi \tau + c \varpi \sin \varpi \tau \\ \left(c + 2 \frac{r}{R_0}\right) \varpi = c \varpi \cos \varpi \tau - \left(3c \frac{r}{R_0} - cr\right) \sin \varpi \tau \end{cases} \quad (8)$$

求解(8)式可得

$$\varpi^4 + 4 \frac{r^2}{R_0^2} \varpi^2 - c^2 r^2 \left(\frac{5}{R_0} - 1\right) \left(\frac{1}{R_0} - 1\right) = 0 \quad (9)$$

当  $1 < R_0 < 5$  时, 方程(9)没有正根  $\varpi$ , 所以当  $\tau \geq 0$  时特征方程(7)的所有特征根都具有复实部, 系统(2)在地方病平衡点  $E_*$  是局部渐近稳定的。

### 3 Hopf 分岔分析

定理 4 当  $R_0 > 5$  时, 存在一个临界值  $\tau_0$

(1) 当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时, 系统(2)的地方病平衡点  $E_*$  是局部渐近稳定的。

(2) 当  $\tau > \tau_0$  时, 系统(2)的地方病平衡点  $E_*$  是不稳定的。并且当  $\tau$  经过  $\tau_0$  时在地方病平衡点  $E_*$  处产生 Hopf 分岔。

证明 当  $R_0 > 5$  时, 由(9)式解得

$$\varpi_0 = -2 \frac{r^2}{R_0^2} + \sqrt{4 \frac{r^4}{R_0^4} - c^2 r^2 \left(\frac{5}{R_0} - 1\right) \left(\frac{1}{R_0} - 1\right)} \quad (10)$$

代入(8)式得

$$\tau_0 = \frac{1}{\varpi_0} \arccos \frac{\left(2c \frac{r}{R_0} - \varpi_0^2\right) \left(3c \frac{r}{R_0} - cr\right) + c \varpi_0^2 \left(c + 2 \frac{r}{R_0}\right)}{\left(3c \frac{r}{R_0} - cr\right) + c^2 \varpi_0^2} \quad (11)$$

将特征方程(7)式左右两边对  $\tau$  求导整理得

$$\left(2\lambda + c + 2 \frac{r}{R_0}\right) \frac{d\lambda}{d\tau} = \left[-\tau e^{-\lambda\tau} \left(c\lambda + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right) + ce^{-\lambda\tau}\right] \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda e^{-\lambda\tau} \left(c\lambda + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right) \quad (12)$$

由(12)式得

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + c + 2 \frac{r}{R_0} - ce^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)}{-\lambda e^{-\lambda\tau} \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} = \frac{2\lambda + c + 2 \frac{r}{R_0}}{-\lambda e^{-\lambda\tau} \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} + \\ &\quad \frac{c}{\lambda \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} - \frac{\tau}{\lambda} = \frac{2\lambda^2 + \left(c + 2 \frac{r}{R_0}\right) \lambda}{-\lambda^2 e^{-\lambda\tau} \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} + \frac{c\lambda}{\lambda^2 \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} - \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned} \quad (13)$$

根据(7)式计算得

$$\frac{2\lambda^2 + \left(c + 2 \frac{r}{R_0}\right) \lambda}{-\lambda^2 e^{-\lambda\tau} \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} + \frac{c\lambda}{\lambda^2 \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} = \frac{\lambda^2 - 2c \frac{r}{R_0}}{-\lambda^2 \left[\lambda^2 + \left(c + 2 \frac{r}{R_0}\right) \lambda + 2c \frac{r}{R_0}\right]} + \frac{-\left(3c \frac{r}{R_0} - cr\right)}{\lambda^2 \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} \quad (14)$$

将(14)代入(13)式得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{\lambda^2 - 2c \frac{r}{R_0}}{-\lambda^2 \left[\lambda^2 + \left(c + 2 \frac{r}{R_0}\right) \lambda + 2c \frac{r}{R_0}\right]} + \frac{-\left(3c \frac{r}{R_0} - cr\right)}{\lambda^2 \left(\lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr\right)} - \frac{\tau}{\lambda} \quad (15)$$

所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\operatorname{Re}(\lambda)}{d\tau} \right|_{\lambda=i\varpi_0} &= \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \bigg|_{\lambda=i\varpi_0} = \operatorname{Re} \left[ \frac{\lambda^2 - 2c \frac{r}{R_0}}{-\lambda^2 \left[ \lambda^2 + \left( c + 2 \frac{r}{R_0} \right) \lambda + 2c \frac{r}{R_0} \right]} \right]_{\lambda=i\varpi_0} + \\ &\left[ \frac{-\left( 3c \frac{r}{R_0} - cr \right)}{\lambda^2 \left( \lambda c + 3c \frac{r}{R_0} - cr \right)} \right]_{\lambda=i\varpi_0} = \frac{\left( \varpi_0^2 - 2c \frac{r}{R_0} \right) \left( \varpi_0^2 + 2c \frac{r}{R_0} \right)}{\varpi_0^2 \left[ \left( 2c \frac{r}{R_0} - \varpi_0^2 \right)^2 + \varpi_0^2 \left( c + 2 \frac{r}{R_0} \right)^2 \right]} + \\ &\frac{\left( 3c \frac{r}{R_0} - cr \right)^2}{\varpi_0^2 \left[ \left( 3c \frac{r}{R_0} - cr \right)^2 + \varpi_0^2 c^2 \right]} = \frac{\varpi_0^4 + c^2 r^2 \left( \frac{5}{R_0} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_0} - 1 \right)}{\varpi_0^2 \left[ \left( 3c \frac{r}{R_0} - cr \right)^2 + \varpi_0^2 c^2 \right]} \end{aligned}$$

当  $R_0 > 5$  时,横截条件  $\left. \frac{d\operatorname{Re}(\lambda)}{d\tau} \right|_{\lambda=i\varpi_0} > 0$

应用 Hopf 分岔定理<sup>[10]</sup>,当  $R_0 > 5, \tau \in [0, \tau_0)$  时,特征方程(7)的所有特征根都具有复实部,系统(2)在地方病平衡点  $E_*$  是局部渐近稳定的。当  $\tau > \tau_0$  时,特征方程(7)至少有一个根具有正实部,系统(2)的地方病平衡点  $E_*$  是不稳定的,并且当  $\tau$  经过  $\tau_0$  时在地方病平衡点  $E_*$  处产生 Hopf 分岔。

#### 4 数值模拟

为了验证上述结果的正确性,对式(2)进行数值仿真如下:

取  $K = 100, r = 2, \mu = 2, \alpha = 2, \beta = 0.1$ , 计算  $R_0$  和  $\tau_0$  得到  $R_0 = 6.25 > 5, \tau_0 = 0.268 4$ , 取  $\tau = 0.2 < \tau_0$ , 根据定理 2, 得到式(2)的解  $E_* = (40, 16.8)$  渐进稳定,如图 1~3 所示。

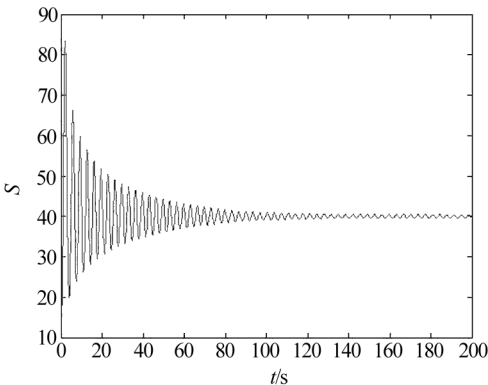


图 1  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.2 < \tau_0$  时,地方病不动点数值仿真  $t-S$  平面

Fig.1 The  $t-S$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.2 < \tau_0$

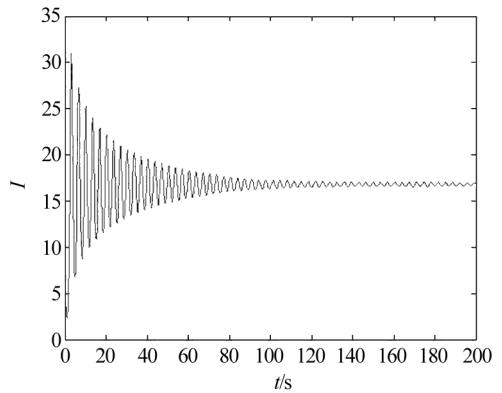


图 2  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.2 < \tau_0$  时,地方病不动点数值仿真  $t-I$  平面

Fig.2 The  $t-I$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.2 < \tau_0$

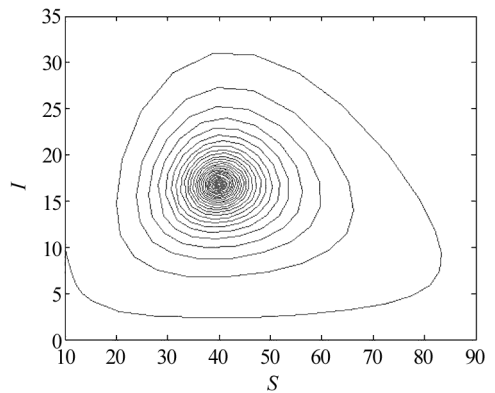


图 3  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.2 < \tau_0$  时,地方病不动点数值仿真  $S-I$  平面

Fig.3 The  $S-I$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.2 < \tau_0$

取  $K = 100, r = 2, \mu = 2, \alpha = 2, \beta = 0.1$ , 计算  $R_0$  和  $\tau_0$  得到  $R_0 = 6.25 > 5, \tau_0 = 0.268 4$ , 取  $\tau =$

$0.3 > \tau_0$ 。根据定理 3, 得到式 (2) 的解  $E_* = (40, 16.8)$  是不稳定的, 并且产生一个 Hopf 分岔, 即分岔出一个周期解, 如图 4~6 所示。

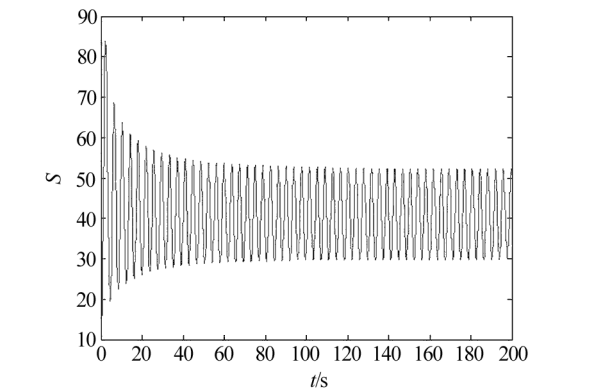


图 4  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.3 > \tau_0$  时, 地方病不动点数值仿真  $t-S$  平面

Fig.4 The  $t-S$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.3 > \tau_0$

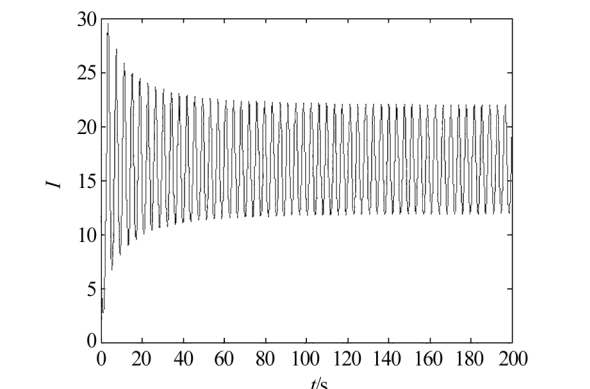


图 5  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.3 > \tau_0$  时, 地方病不动点数值仿真  $t-I$  平面

Fig.5 The  $t-I$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.3 > \tau_0$

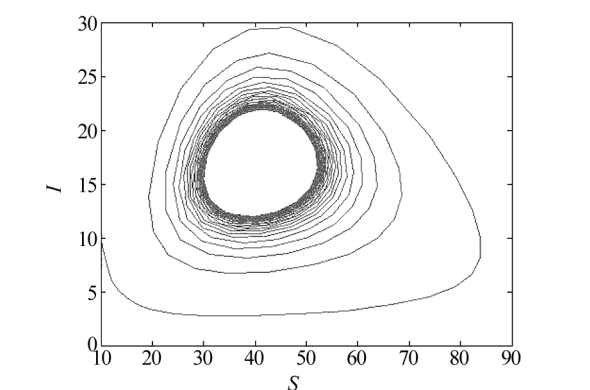


图 6  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.3 > \tau_0$  时, 地方病不动点数值仿真  $S-I$  平面

Fig.6 The  $S-I$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 6.25 > 5, \tau = 0.3 > \tau_0$

取  $K = 100, r = 2, \mu = 2, \alpha = 2, \beta = 0.08$ , 计算  $R_0$ , 得到  $R_0 = 4 < 5$ , 取  $\tau = 0.4$ 。根据定理 4, 得到式 (2) 的解  $E_* = (50, 18.75)$  渐进稳定, 如图 7~9 所示。

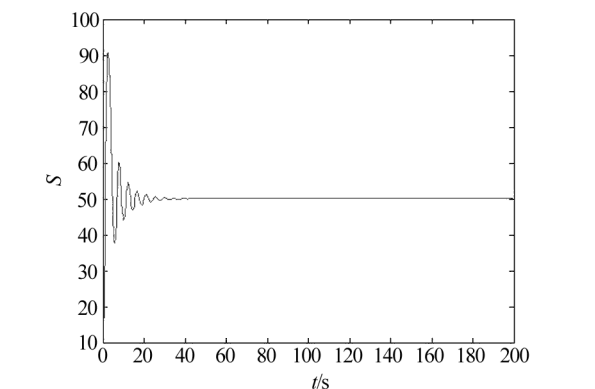


图 7  $R_0 = 4 < 5, \tau = 0.4 > \tau_0$  时, 地方病不动点数值仿真  $t-S$  平面

Fig.7 The  $t-S$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 4 < 5, \tau = 0.4 > \tau_0$

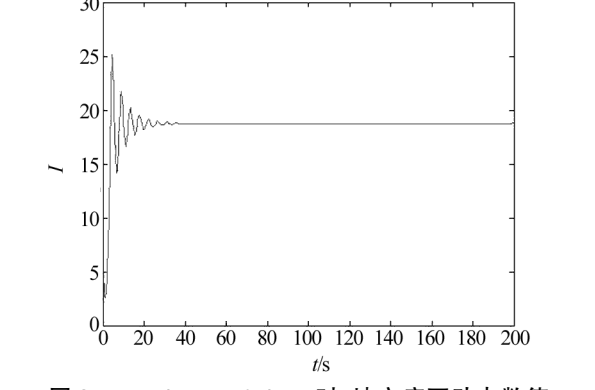


图 8  $R_0 = 4 < 5, \tau = 0.4 > \tau_0$  时, 地方病不动点数值仿真  $t-I$  平面

Fig.8 The  $t-I$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 4 < 5, \tau = 0.4 > \tau_0$

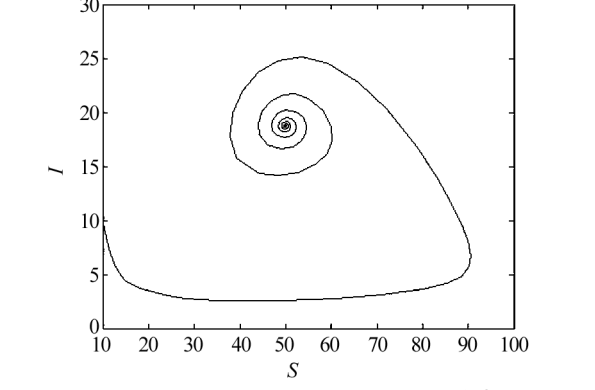


图 9  $R_0 = 4 < 5, \tau = 0.4 > \tau_0$  时, 地方病不动点数值仿真  $S-I$  平面

Fig.9 The  $S-I$  plane of endemic equilibrium when  $R_0 = 4 < 5, \tau = 0.4 > \tau_0$

## 5 结语

计算机病毒的防治是计算机安全领域的重要课题,是长期而复杂的任务,需要深入研究计算机病毒传播原理,对计算机病毒的有效预防和控制提供理论基础。本文提出了一种带 Gilpin-Ayala 增长率的时滞计算机网络病毒传播模型,研究基本再生数  $R_0$  和时滞  $\tau$  对网络病毒传播模型的影响。研究表明,当  $R_0 < 1$  时,无病平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的;当  $1 < R_0 < 5$  时,地方病平衡点

$E_*$  是局部渐近稳定的;当  $R_0 > 5$  时,存在一个临界值  $\tau_0$ ,当  $\tau$  的值低于临界点  $\tau_0$  时,模型处于理想的稳定状态。此时,将有利于对网络病毒的传播进行有效的控制。当  $\tau$  的值一旦超越临界点  $\tau_0$  时,模型将失去稳定性,并在有病毒平衡点附近产生 Hopf 分岔。此时,模型将进入极限环状态,网络病毒的传播将失去控制。因此,应该采取有效措施尽量减小  $\tau$  和  $R_0$  的值,延迟和消除 Hopf 分岔的发生,控制和消除计算机病毒在网络上的传播。

## 参考文献:

- [1] Kephart J O, White S R. Directed graph epidemiological model of computer viruses[C] // Proceedings of the IEEE Symposium on Security and Privacy, May 20-23, 1991, Oakland, California, USA. Washington D C: IEEE Computer Society, 1991.
- [2] 盖绍婷,唐功友,于浩.带有免疫的计算机病毒传播模型的稳定性[J].中国海洋大学学报(自然科学版),2013,43(10):110-114.
- [3] 杨茂斌,杨小帆,祝清意.具有分级感染率的 4 仓室计算机病毒传播模型[J].重庆大学学报,2012,35(12):112-119.
- [4] 张道祥,李迅.非连续免疫策略对计算机病毒 SIR 模型的影响[J].应用科学学报,2016,34(3):329-338.
- [5] 陈旭辉,李尘,柯铭.一类具有个体差异性和非近邻传播特性的 SIRS 计算机病毒传播模型[J].计算机应用与软件,2013,30(5):15-19.
- [6] 胡宝安,李兵,李亚玲.具有时滞的 SIR 计算机病毒传播模型[J].计算机工程,2016,42(5):168-172.
- [7] 李君.具有密度依赖和有限抗病毒能力的计算机病毒模型的前向与后向分支[J].中山大学学报(自然科学版),2016,55(1):35-38.
- [8] Ren J, Yang X, Zhu Q. A novel computer virus model and its dynamics[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012,13(1):376-384.
- [9] Fan M, Wang K. Periodic solutions of a generalized n-species Gilpin-Ayala competition model[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2000,40(10):1141-1151.
- [10] Hale J K, Verduyn L S. Introduction to Functional Differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

(特约编辑:黄家瑜)