第 14 卷 第 6 期　　福建工程学院学报　　Vol.14 No.6
2016 年 12 月　　Journal of Fujian University of Technology　　Dec. 2016

doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2016.06.008

MDO 中学科优解与整体优解关系探讨

银光球, 刘斌彬, 凌静秀

(福建工程学院 机械与汽车工程学院, 福建 福州 350118)

摘要: 在研究复杂产品系统规划分解、整体优化的基础上,提出了 MDO 中学科的数学描述方法;根据学科优化模型和系统整体优化模型,结合库恩—塔克极值理论,提出并证明了 MDO 中学科最优解直接组合成为系统整体最优解的 3 个条件,丰富了复杂产品系统的优化理论,分析了现实中系统整体最优解很难由学科最优解直接组合而得到的原因,得到了整体优化与学科优化的辩证关系,有助于寻找复杂产品系统的整体优解。

关键词: 学科优解; 整体优解; MDO; 学科

中图分类号: N945.15　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1672-4348(2016)06-0553-04

Discussion on relationship between disciplinary optimal solution and global optimal solution in MDO

Yin Guangqiu, Liu Binbin, Ling Jingxiu

(College of Mechanical and Automotive Engineering, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China)

Abstract: Based on decomposition and overall optimization of complex product system, a mathematic method was proposed to describe disciplinary in multidisciplinary design optimization (MDO). Based on system global optimization model and disciplinary optimization model, combined with the Kuhn-Tucker extreme value theory, three conditions of disciplinary optimal solutions that compose system global optimal solutions were presented. The difficulty in attaining system global optimal solutions through disciplinary optimal solutions superposition was analysed. The dialectical relationship between the global optimization and the disciplinary optimizations was derived, which can contribute to the global optimization solutions of complex product system.

Keywords: disciplinary optimization solution; whole optimization solution; multidisciplinary design optimization (MDO); discipline

复杂产品多数组成复杂、技术构成复杂、设计过程涵盖多个学科,而且学科间耦合度高,产品设计优化不易实现,比如航天器[1]、舰船[2]、工程机械[3-4]等,它是一个集多种学科知识于一体的综合体。产品的学科知识只是产品系统的某一方面或部分,代表产品整体的某一功能、行为或结构。每一学科都需要专门的领域专家进行各自的设计、仿真和优化等活动,但是学科最优并不代表复杂产品整体最优。对于复杂产品而言,往往需要的是产品整体最优化,但是直接进行整体设计优化,又会因“维数灾难”而难以求解。这就需要采用“分而治之”的思想,将复杂产品分解成多个从不同角度影响产品整体性能的多个学科(子系统),分别进行优化,得到各个学科的最优解,然

收稿日期: 2016-10-31
基金项目: 福建省自然科学基金项目(2016J01722)
第一作者简介: 银光球(1974-),男,湖南武冈人,博士研究生,副教授,主要从事工程机械、协同优化理论、机构学等方面的研究。

后运用优化策略，求得复杂系统的整体最优解或满意解。要解决这些问题就必须探讨学科优解与整体优解的关系。

多学科设计优化（multidisciplinary design optimization，简称 MDO）是近 20 年来工程设计领域研究的热点问题，被认为是一种较有前途的复杂系统设计优化理论。目前，国内外学者对 MDO 已展开了大量研究，主要集中在寻优策略[5-6]、学科建模与规划[7-8]和优化方法[9-10]等方面，鲜有文献对学科优解与整体优解关系进行探讨和研究，本文拟从优化理论的角度探讨复杂产品系统学科优解与整体优解的辩证关系，对复杂产品系统的优化设计具有指导意义。

1 复杂机械产品系统的规划分解

复杂机械产品的整体设计优化因其复杂性而难以得到系统的整体优化模型，即使获得了系统的整体优化模型，又会因“维数灾难”而难以求解。因此，为了获得复杂机械产品系统的整体优解，必须将复杂产品系统进行规划分解，分解成从不同角度影响系统整体性能的多个学科（子系统），而且每个学科必须具有自治性。

在 MDO 中，学科是指系统中本身相对独立、相互之间又有数据交换关系的基本模块。学科可以图 1 的形式表示，图中 x 为系统变量，也称全局变量；x^i 为学科 D_i 的独立变量，也称局部变量；y^{ij} 为学科 D_i 输出变量，同时又是学科 D_j 的输入变量；y^{ji} 为学科 D_j 输出变量，同时又是学科 D_i 的输入变量；y^{ij} 与 y^{ji} 体现了学科之间的耦合特性。r^i 为学科 D_i 的中间状态变量，在学科计算时产生，计算后消亡；f^i 为学科 D_i 的优化目标函数；g^i 为学科 D_i 的约束函数。

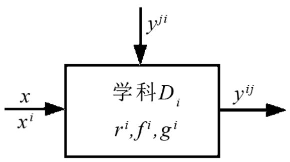

图 1 学科的图形描述

Fig.1 Graph description of discipline

此外，学科 D_i 也可用下式的数学符号描述。

$$D_i = [X^i,\quad f^i,\quad g^i]。 \tag{1}$$

式中，X^i 为学科 D_i 的参数集，$X^i=[x,x^i,y^{ij},y^{ji},r^i]$。

通过规划分解，复杂产品系统被分解成优化求解相对容易的多个学科，同时希望复杂产品系统经规划分解后不会“失真”。对 MDO 优化问题，希望规划分解后，在各个学科优化的基础上能够得到原复杂系统的优化结果。

2 整体优化与学科优化

假设复杂产品系统 S 由 K 个既相互独立又相互联系的学科组成，下面对整体优化与学科优化之间的关系进行探讨。

2.1 整体优化

复杂产品设计时，针对某些整体性能，必须进行整体优化。为描述复杂产品系统的整体优化设计，设定如下抽象的数学模型：

$$\begin{cases} \text{Find} \quad \boldsymbol{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}} \\ \min \quad F(\boldsymbol{X}) \\ \text{s.t.} \quad g_i(\boldsymbol{X}) \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 为优化设计变量；$F(\boldsymbol{X})$ 为优化目标函数；$g_i(\boldsymbol{X})$ 为优化约束函数。

此模型包括任何设计变量、线性的、非线性的目标函数和约束函数，由于等式约束可以表示为一对不等式约束，变量范围约束也可表示为不等式约束，因此，该模型对于任何复杂产品系统的优化问题具有广泛的一般性。

根据极值理论，复杂产品系统整体优化模型在点 $\boldsymbol{X}^*$ 取极值的库恩—塔克必要条件如下：

$$\begin{cases} \nabla F(\boldsymbol{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{X}^*) = 0 \\ \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{X}^*) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ g_i(\boldsymbol{X}^*) \leqslant 0 \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{3}$$

式中，λ_i 为整体优化极值时拉格朗日乘子。

如果式（2）中的约束域是凸集，目标函数是约束域上的凸函数，则 $\boldsymbol{X}^*$ 就是复杂产品系统的整体最优解，又称为整体优解或全局优解。

2.2 学科优化

学科（子系统）是复杂产品系统的有机组成部分，描述了产品的局部性能或某个子系统的行为、功能。学科优化是为了获得产品的局部性能或某个子系统的行为、功能的最佳化。为了描述学科 $D_i=(i=1,2,\cdots,K)$ 的优化问题，假设第 i 个

学科单独优化设计的数学模型为：

$$\begin{cases}\text{Find} \quad \boldsymbol{X}_i = \left[x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots \quad x_{inc_i}\right]^{\mathrm{T}} \\ \min \quad f_i(\boldsymbol{X}_i) \qquad\qquad\qquad\qquad ,i=1,2,\cdots,K \\ \text{s.t.} \quad g_{ij}(\boldsymbol{X}_i) \leqslant 0, j=1,2,\cdots,J_i\end{cases} \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{X}_i$ 为学科 i 的优化设计变量；$f_i(\boldsymbol{X}_i)$ 为学科 i 的优化设计目标函数；$g_{ij}(\boldsymbol{X}_i)$ 为学科 i 的约束函数；nc_i 为学科 i 的优化变量数目；J_i 为学科 i 的约束数目。与整体优化模型一样，它具有广泛的一般性。

同样，根据极值理论，第 i 个学科单独优化模型在点 $\boldsymbol{X}_i^*$ 取极值的库恩—塔克必要条件如下：

$$\begin{cases}\nabla f_i(\boldsymbol{X}_i^*) + \sum\limits_{j=1}^{J_i} \lambda_{ij} \nabla g_{ij}(\boldsymbol{X}_i^*) = 0 \\ \lambda_{ij} \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,J_i \\ \lambda_{ij} \nabla g_{ij}(\boldsymbol{X}_i^*) = 0, \quad j=1,2,\cdots,J_i \\ g_{ij}(\boldsymbol{X}_i^*) \leqslant 0 \quad j=1,2,\cdots,J_i\end{cases} \tag{5}$$

式中，λ_{ij} 为第 i 个学科优化时的拉格朗日乘子。

在式(4)满足式(5)的条件下，如果式(4)中的约束域是凸集，目标函数是约束域上的凸函数，则 X_i^* 就是第 i 个学科单独优化模型的最优解，又称为学科优解或局部优解。

2.3　学科优解与整体优解的关系

上述整体优化模型与学科优化模型虽然针对同一复杂产品系统，但在表述上整体优化与学科优化没任何联系，似乎学科优解 $\boldsymbol{X}_i^*$ 和整体优解 $\boldsymbol{X}^*$ 也没有任何关系。实际上，复杂产品系统的整体优化与学科优化有着千丝万缕的联系，比如耦合变量的相容性问题，学科优化目标与整体优化目标一致性问题等。

欲使组成复杂产品系统的各个学科单独最优解组合起来即为复杂产品系统整体最优解，那么复杂产品系统整体优化的设计变量、目标函数和约束函数与各个学科单独优化的设计变量、目标函数和约束函数必需满足以下关系：

1)系统整体优化的设计变量由各学科单独优化的设计变量组成，且各个学科间相互独立。

2)系统整体优化的目标函数可以表示为各学科目标函数的函数，而且整体优化的目标函数为各学科目标函数的单调增函数。

3)系统整体优化的约束函数由各学科单独优化的约束函数全体组成，且不能有额外的多余约束。

综合以上条件，式(2)表示的复杂产品系统整体优化模型可表示为如下形式：

$$\begin{cases}\text{Find} \quad \boldsymbol{X} = \left[X_1, X_2, \cdots, X_K\right]^{\mathrm{T}} = \left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]^{\mathrm{T}} \\ \min \quad F(\boldsymbol{X}) = F\left[f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_K(X_K)\right] \\ \text{s.t.} \quad g_{ij}(\boldsymbol{X}) \leqslant 0, i=1,2,\cdots,K; j=1,2,\cdots,J_i\end{cases} \tag{6}$$

式中，目标函数 $F(\boldsymbol{X})$ 还必须满足$\dfrac{\partial F}{\partial f_i} \geqslant 0$。

如果式(2)表示的复杂产品系统整体优化模型满足上述的 3 个条件，而 $\boldsymbol{X}_i^*(i=1,2,\cdots,K)$ 分别为式(4)所表示学科 $i(i=1,2,\cdots,K)$ 的最优解，则 $\boldsymbol{X}^* = [X_1^*, X_2^*, \cdots, X_K^*]^{\mathrm{T}}$ 必为复杂产品系统整体优化模型的最优解。证明如下：

(1)条件必要性证明

证明：学科 $i(i=1,2,\cdots,K)$ 单独优化的库恩—塔克条件式(5)的第一个式子在点 $\boldsymbol{X}_i^*$ 应满足：

$$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)}{\partial x_{ik}} + \sum_{j=1}^{J_i} \lambda_{ij} \frac{\partial g_{ij}(\boldsymbol{X}_i^*)}{\partial x_{ik}} = 0 \tag{7}$$

式中，x_{ik} 为学科 i 的第 k 个变量。将式(7)两边同乘以$\dfrac{\partial F(\boldsymbol{X}^*)}{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)}$，可以得到

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{X}^*)}{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)}{\partial x_{ik}} + \sum_{j=1}^{J_i} \frac{\partial F(\boldsymbol{X}^*)}{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)} \lambda_{1j} \frac{\partial g_{ij}(\boldsymbol{X}_i^*)}{\partial x_{ik}} = 0 \tag{8}$$

令：$\lambda_{1j}^0 = \dfrac{\partial F(\boldsymbol{X}^*)}{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)} \lambda_{ij}$

则可得

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{X}^*)}{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{X}_i^*)}{\partial x_{ik}} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^0 \frac{\partial g_{ij}(\boldsymbol{X}_i^*)}{\partial x_{ik}} = 0 \tag{9}$$

比较式(9)和式(3)可得：$\boldsymbol{X}_i^*$ 能满足式(3)的首要条件。此外，因为$\dfrac{\partial F}{\partial f_i} \geqslant 0$，且 $\boldsymbol{X}_i^*$ 还满足式(5)中的其余条件，所以可推得 $\boldsymbol{X}_i^*$ 也能满足式(3)中的其余条件。从而可以证明，学科 i 的最优解 $\boldsymbol{X}_i^*$ 能满足系统整体最优解的必要条件。

(2)条件充分性证明

该问题的充分条件是：若学科 $i(i=1,2,\cdots,K)$

的优化模型为凸规划,则由学科 $i(i = 1,2,\cdots,K)$ 组成的复杂产品系统整体优化模型亦为凸规划。

证明:若学科 $i(i = 1,2,\cdots,K)$ 的优化模型为凸规划,则在学科 $i(i = 1,2,\cdots,K)$ 的可行域内,$f_i(\boldsymbol{X}_i)$ 必为凸函数,则 $f_i(\boldsymbol{X}_i)$ 的二阶导数组成的海森阵 $\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{X}_i)$ 为半正定,所以海森阵 $\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{X}_i)$ 的特征值非负,即 $\lambda_{ij} \geqslant 0$。

此外,当系统整体最优解由各学科最优解汇总而成时,系统整体优化的目标函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ 在其可行域内的二阶导数组成的海森阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$ 为对角矩阵,对角线上为学科 $i(i = 1,2,\cdots,K)$ 的海森阵,即:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{diag}[\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{X}_1),\ \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{X}_2),\ \cdots,\ \boldsymbol{H}_K(\boldsymbol{X}_K)] \tag{10}$$

则由对角阵的性质可以得到系统整体目标函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ 的海森阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$ 的特征值为:

$$\lambda_{ij}^0 = \left[\frac{\partial F}{\partial f_{i1}}\lambda_{1j},\quad \frac{\partial F}{\partial f_{i2}}\lambda_{2j},\quad \cdots,\quad \frac{\partial F}{\partial f_{iK}}\lambda_{Kj}\right] \tag{11}$$

因为在式(6)中设定 $\frac{\partial F}{\partial f_i} \geqslant 0$,所以 $\lambda_{ij}^0 \geqslant 0$,因此,系统整体优化亦为凸规划。

综上所述,当系统整体优化模型和学科 $i(i = 1,2,\cdots,K)$ 的优化模型可分别表示为式(3)、(5),且同时满足条件(1)、(2)和(3)时,则系统整体最优解就可由学科 $i(i = 1,2,\cdots,K)$ 的最优解组合而成,从而为复杂产品系统的整体优化提供了一种简单可行的方法。

通过对整体优解与学科优解辩证关系的探讨,得到了整体最优与学科最优的辩证关系:学科(子系统)最优并不代表由其组成的整体(系统)最优,整体(系统)最优也不一定代表组成的各个学科(子系统)是最优的。原因在于复杂产品系统中耦合现象的存在,比如不同学科之间变量的耦合,学科与整体之间变量的耦合,以及学科优化目标与整体优化目标的一致性问题等。当学科优化目标与整体优化目标负相关时,学科目标最优反而表示整体优化目标最差,或整体目标最优代表学科优化目标最差。为解决这一矛盾,必须在整体与学科、学科与学科之间进行协调处理,使学科的优化服务服从于系统的整体优化。

3 结论

1)提出了 MDO 中学科(子系统)的数学描述方法,规范了 MDO 中学科描述的形式。

2)提出并证明了 MDO 中复杂系统经规划分解后,系统整体最优解由学科最优解直接组合而成的条件,丰富了复杂产品系统的优化理论。

3)分析了现实中复杂产品系统的整体最优解不可能由学科最优解不经协调而直接组合得到的原因,得到了复杂产品系统中的整体优化与学科优化的辩证关系,有助于寻找复杂产品系统的整体优解。

参考文献:

[1] Love M H. Multidisciplinary design practices from the F-16 agile falcon[J].Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics,1998,47(4):23-35.

[2] 刘蔚.多学科设计优化方法在 7000 米载人潜水器总体设计中的应用[D].上海:上海交通大学,2007.

[3] 薛彩军.结构静动态协同优化设计的若干关键问题研究[D].杭州:浙江大学,2003.

[4] 季炳伟.面向并行设计的建模方法研究[D].杭州:浙江大学,2007.

[5] 秦东晨,王丽霞,张珂.大型机械结构件的多学科设计优化(MDO)研究[J].机床与液压,2004(4):64-65.

[6] 张保成, 殷勋,张林仙.基于 MDO 技术的油底壳结构优化方法研究[J].系统仿真学报,2008,20(14):3800-3802.

[7] 李冠华,尤政,付俊明,等.一种分布式微小卫星多学科设计优化环境构架[J].清华大学学报(自然科学版),2011,51(8):1072-1077.

[8] 杨俊杰,王荣桥,樊江,等.涡轮叶片的气动-热-结构多学科设计优化研究[J].航空动力学报,2010,25(3):617-622.

[9] Simpson T W,Joaquim R R, Martins A. Multidisciplinary design optimization for complex engineered systems[J]. Journal of Mechanical Design,2011,133(10):1-10.

[10] Suh M W, Shim M B, Kim M S. Multidisciplinary design optimization of engine mounts with consideration of the driveline[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers,2003,217(2):107-114.

(责任编辑:陈雯)