

# 响应面方法在建模及模型优化中的应用

林晓松<sup>1,2</sup>, 黄志斌<sup>3</sup>, 郭岩昕<sup>4</sup>

(1. 福建工程学院 土木工程学院, 福建 福州 350118; 2. 福建省土木工程新技术与信息化重点实验室, 福建 福州 350118; 3. 京福闽赣铁路客运专线有限公司, 福建 福州 350013; 4. 三明学院 建筑工程学院, 福建 三明 365004; )

**摘要:** 针对复杂结构仿真中有限元仿真精度及效率不高的问题, 提出采用高阶响应面方法进行建模及优化, 并用桥梁模型来验证。选取合适参数, 采用试验设计获取响应样本点, 基于数理统计的逐步回归法对各自变量进行显著性分析, 筛选对目标响应函数显著度高的自变量, 再应用最小二乘法拟合各自变量的系数, 得到三阶多项式响应面模型, 用多目标优化算法进行优化。对比修正前后模态频率, 结果表明应用响应面方法能得到简单而高精度的结构模型, 从而验证了高阶响应面方法在建模及模型优化中的有效性。

**关键词:** 响应面方法; 高阶; 建模; 优化

中图分类号: TU311

文献标志码: A

文章编号: 1672-4348(2016)01-0005-05

## Application of high-order response surface method in modelling and model optimization

Lin Xiaosong<sup>1,2</sup>, Huang Zhibin<sup>3</sup>, Guo Yanxi<sup>4</sup>

(1. College of Civil Engineering, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China;  
2. Fujian Provincial Key Laboratory of Advanced Technology and Informationization in Civil Engineering, Fuzhou 350118, China;  
3. Fujian-Jiangxi Section of Beijing-Fuzhou Passenger Railway Line Co., Ltd., Fuzhou 350013, China;  
4. College of Civil Engineering and Architecture, Sanming University, Sanming 365004, China)

**Abstract:** To solve the problem of inefficiency and low accuracy in finite element simulation in sophisticated structure simulation, a new approach to modelling and optimizing via response surface method was proposed. A bridge model was taken as an example. After parameters screening, sample points were acquired by using D-optimality design, and parameter significance tests were completed based on stepwise regression method. The polynomial coefficients were fitted by the least squares method to construct the response surface model of the bridge. The model was optimized via multi-goal optimization algorithm based on the model. By comparing the modal frequencies of non-updated and updated finite element model (FEM), it can be concluded that simple and high-precision model can be obtained by the response surface method.

**Keywords:** response surface method; high-order; modelling; optimization

有限元法作为一种结构数值分析方法, 被广泛应用于结构的计算分析。但由于结构的复杂性、分析过程中存在众多的不确定因素或者建模

中的简化等原因, 有限元仿真结果与试验结果之间必然存在误差。为减少偏差, 可用试验数据对初始模型进行修正。但从优化的角度出发, 根据

收稿日期: 2016-01-21

基金项目: 福建工程学院科技发展基金(GY-Z10086)

第一作者简介: 林晓松(1984-), 女, 福建古田人, 实验师, 硕士, 研究方向: 健康监测、既有结构评估与加固。

分析结果修改有限元模型,反复计算、反复分析,不但造成计算时间难以承受,而且在某些算法上还容易使寻优结果陷入局部最优解。采用响应面方法可以有效地解决以上问题,因为响应面模型同时考虑了拟合精度和拟合效率,能够替代原来的有限元模型进行数值计算,大幅提高优化计算的效率。A. L. Cundy<sup>[1]</sup>等提出利用响应面模型进行结构损伤识别,并用实验室金属悬臂梁的动力测试实验进行了验证。Alaswad<sup>[2]</sup>等用有限元和RSM相结合的方法对管件液压成型进行分析。杜家政<sup>[3]</sup>等利用响应面法对五心底结构形状优化设计。

针对复杂结构仿真中有限元仿真精度及效率不高的问题,本文提出采用高阶响应面方法进行建模及优化,并将其应用于桥梁以验证该方法的有效性。

1 响应面方法概述

响应面方法(response surface method, RSM)最早由 Box 和 Wilson<sup>[4]</sup>提出,它是一项基于统计学分析的综合试验技术,用于处理体系或结构的输入(变量)与输出(响应)间的转换关系问题。响应面方法的概念表述为<sup>[5-6]</sup>:在变量的设计空间内,采用回归分析法对样本点处的响应值或试

验值拟合,得到响应面模型;其构造的响应面模型可以将结构响应与参数间复杂的关系用较简单的数学关系式近似表达,在进一步的问题分析和求解中,用于替代有限元模型或其它复杂模型进行更有效设计或计算。回归的响应面模型被称为“模型的模型”,在对响应受多个变量影响的问题进行研究时,表现出明显的优越性。

响应面模型的建立一般包括 4 个方面:1) 试验设计;2) 参数筛选及显著性检验;3) 响应面函数选择及拟合;4) 响应面模型验证。其中,响应面函数形式的选择及拟合、试验设计是响应面方法的关键。

2 算例

2.1 桥梁模型及其模态分析

三跨连续梁桥模型,如图 1、2 所示,计算跨度为 4.5 m + 7.0 m + 4.5 m,截面为空心板和单箱双室的特殊截面,纵向接缝采用铰接连接。在梁上布置加速度传感器进行环境振动测试,由 DH5920 动态信号测试分析系统处理振动信号,基于 MACEC 模态分析软件,采用随机子空间法(stochastic subspace identification, SSI)识别桥梁的动力特性得到该桥竖向前 3 阶、横向 1 阶、纵向 1 阶、扭转前 2 阶的频率如表 1 所示。

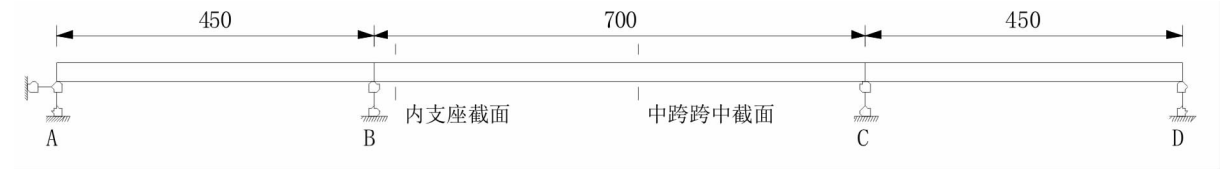


图 1 三跨连续梁桥简图(单位:cm)

Fig. 1 Diagram of three span continuous girder bridge(unit:cm)

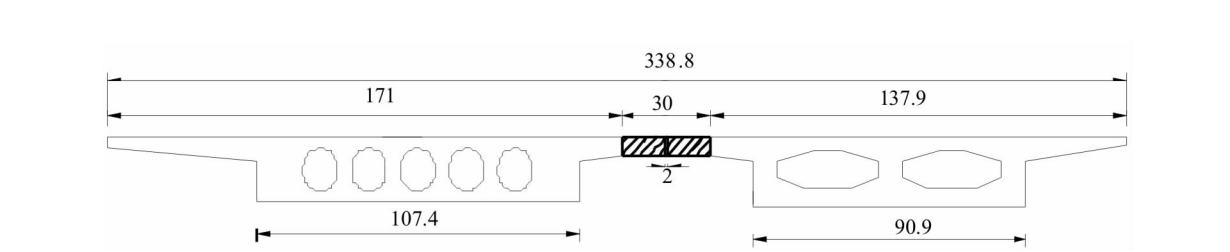


图 2 桥梁截面(单位:cm)

Fig. 2 Crosssection of three span continuous girder bridge(unit:cm)

2.2 有限元模型(FEM)

用有限元程序 ANSYS 建立三跨连续梁桥有限元模型(FEM),如图 3 所示。 $X$ 轴沿桥纵轴方

向, $Y$ 轴竖向向上, $Z$ 轴为垂直桥梁纵向轴线的水平横桥方向,纵向接缝采用铰接连接。模型总单元数为 5 162 个,其中空间杆单元 486 个,空间块

单元 4 676 个, 弹簧单元 292 个。采用 SOLID45 单元模拟混凝土, LINK8 单元模拟钢筋。边界条件: 支座的竖向、横向和纵向约束采用 Combin14 弹簧单元模拟, 竖向、纵向、横向弹簧刚度初始值分别为  $3.0 \times 10^7$ 、 $1.2 \times 10^6$ 、 $1.3 \times 10^6$  N/m; 材料特性: 混凝土弹性模量  $E = 3.45 \times 10^4$  MPa, 密度为  $2\,500\text{ kg/m}^3$ , 泊松比为 0.20。

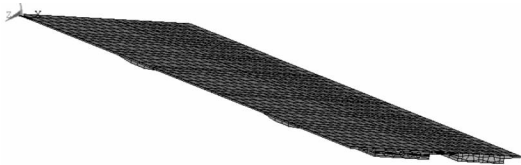


图 3 桥梁有限元模型

Fig. 3 FEM of three-span continuous girder bridge

对有限元模型进行模态分析, 得到初始有限元模型计算的频率, 并与实测频率进行比较, 如表 1 所示。由表 1 知, 有限元模型的计算频率与实测频率相对误差不均衡, 最大、最小值分别为 7.371%、0.025%。

表 1 实测频率、有限元模型计算频率及其比较  
Tab. 1 Comparison between the tested frequencies and that of FEM

模态阶次	实测频率/ Hz ①	有限元模型 计算频率/Hz ②	有限元模型 相对误差/% (② - ①)/①
竖向一阶	21.537	21.894	1.658
竖向二阶	50.551	49.003	-3.062
竖向三阶	79.341	78.687	-0.824
横向一阶	9.524	10.226	7.371
纵向一阶	9.426	10.095	7.097
扭转一阶	27.990	27.983	-0.025
扭转二阶	71.058	70.215	-1.186

2.3 响应面模型及优化

2.3.1 响应面函数的选择

响应面函数形式应满足两个要求: ①响应面函数表达式在基本能够描述系统输入参数和输出响应间关系的前提下应尽可能简单; ②响应面函数表达式中待定系数的个数尽可能少, 以减少系统试验次数或计算次数。常见的响应面模型有: 完全和不完全多项式模型<sup>[7]</sup>、克里格 (Kriging) 模

型、BP(back propagation)神经网络模型<sup>[8]</sup>、径向基函数<sup>[9]</sup>和多元适应性回归样条函数<sup>[10]</sup>。目前, 用于桥梁工程的响应面模型多采用多项式模型, 由于计算方面的原因, 以二阶多项式最为常见, 高阶多项式较少应用。但随着建模精度要求的提高以及结构的复杂化, 需要建立更高阶响应面模型。本文研究三阶多项式响应面模型, 如式(1)。

$$\hat{y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^k \beta_{iii} x_i^3 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ (i < j)}} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_i \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} \beta_{ijj} (x_i)^2 x_j + \sum_i \sum_{\substack{j \\ (i < j < k)}} \beta_{ijk} x_i x_j x_k \tag{1}$$

式中:  $\hat{y}$  为各响应目标,  $x_i \in [x_i^l, x_i^u]$ , ( $i \in (1, k)$ ),  $x_i^l, x_i^u$  分别为参数  $x_i$  取值范围的上边界和下边界,  $\beta_0, \beta_i, \beta_{ii}, \beta_{iii}, \beta_{ij}, \beta_{ijj}, \beta_{ijk}$  为各待定系数。

本算例选取支座竖向弹簧刚度  $R_v$ 、横向弹簧刚度  $R_h$  和纵向弹簧刚度  $R_l$  为 3 个修正参数; 选取竖向前 3 阶、横向前 1 阶、纵向 1 阶、扭转 2 阶 7 个模态频率为响应, 因此要拟合 7 个三阶响应面函数式。

2.3.2 试验设计

试验设计是以概率统计为理论基础, 研究多因子与响应变量关系的一种科学方法。试验设计方法的选择与响应特性、响应面函数形式密切相关, 不同的试验设计方法适应于不同的系统、不同的响应面函数形式。试验设计构造的样本试验点在修正参数区间内的分布对响应面的近似精度有很大影响。常用的试验设计方法有: 正交设计<sup>[10]</sup>、均匀设计(uniform design, UN)、中心复合设计(central composite experiment design, CCD)<sup>[11]</sup>、全因子设计<sup>[7]</sup>、D-最优设计(D-optimality)<sup>[11]</sup>、BBD 设计(Box-Behnken design)<sup>[11]</sup>等。其中, 正交设计和 UN 仅适合于低阶响应面模型; BBD 不宜用于较大规模的模型; 全因子设计精度高, 但计算量太大; D-最优设计方法用于高阶响应面建模精度最高<sup>[11]</sup>。本文是要建立高阶响应面模型, 因此采用 D-最优设计方法进行试验设计。

含 3 个参数的三阶响应面多项式有 20 个待定系数, 因此试验设计次数要不少于 20 次。D-最优设计最接近的试验次数为 30 次(即 30 组设计参数组合), 将各组数据代入初始有限元模型中求得响应样本值, 如表 2 所示。

表 2 D-最优试验设计频率样本值  
Tab. 2 Frequency sample values by D-optimality design

试验 次数	$R_v$	$R_h$	$R_l$	竖向一阶 $V_1$	竖向二阶 $V_2$	竖向三阶 $V_3$	横向一阶 $H_1$	纵向一阶 $L_1$	扭转一阶 $T_1$	扭转二阶 $T_2$
1	32.00	1.04	1.12	22.039	49.689	79.365	9.190	9.753	28.235	70.771
2	24.00	1.56	1.12	21.286	46.864	74.914	11.138	9.758	26.922	68.070
3	24.00	1.04	0.96	21.262	46.824	74.784	9.186	9.033	26.874	67.954
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
28	24.00	1.04	1.28	21.273	46.829	74.795	9.185	10.419	26.880	67.958
29	27.00	1.17	1.08	21.609	47.916	77.815	9.722	9.579	27.486	69.155
30	36.00	1.04	1.44	22.318	51.088	80.932	9.192	11.041	28.705	71.910

2.3.3 参数显著性检验及响应面函数拟合

参数显著性检验就是具体分析各个参数及其组合(自变量)对响应影响的显著程度,筛选对响应影响显著的自变量,忽略对响应影响很小的自变量,从而有效地减少响应面函数的拟合系数,减少计算量,提高响应面模型精度。

本文基于试验设计的 30 个样本,采用逐步回归法进行参数显著性检验,决定变量的取舍。此方法是以数理统计中 F 检验法为标准,较之其他方法能更及时纳入对响应显著的自变量并剔除对响应不显著的自变量。具体做法:进行逐步回归分析前设定 Entry 值和 Remove 值分别为 0.05 和 0.10,即如果一个自变量的 F 统计量的 P 值小于显著性水平 0.05,则拒绝  $H_0$ ,认为该变量对因变量影响是显著的;如果方程中一个自变量的 F 统计量的 P 值大于显著性水平 0.10,则不能拒绝  $H_0$ ,应将其剔除出方程。

2.3.4 响应面函数拟合

由逐步回归法选取对响应显著的自变量后,进行响应面函数的拟合,即求解响应面函数筛选的显著自变量的系数,最小二乘法是求解待定系数的基本方法,基于 Matlab 编写简单的程序即可实现。以竖向 1 阶、横向 1 阶为例,式(2)、(3)所示三阶多项式即为竖向 1 阶、横向 1 阶模态频率的三阶响应面模型。

$$V_1 = 14.612\,36 + 0.474\,47\,R_v + 0.027\,96\,R_h + 0.0312\,3\,R_l + 5.055\,20 \times 10^{-4}R_vR_h + 2.177\,94 \times 10^{-4}R_vR_l -$$

$$3.693\,29 \times 10^{-3}R_hR_l - 0.0104\,3\,R_v^2 + 8.675\,75 \times 10^{-5}R_v^3 \quad (2)$$
$$H_1 = 4.787\,68 + 0.240\,94\,R_v - 2.118\,24\,R_h + 0.396\,28\,R_l + 8.000\,96 \times 10^{-3}R_vR_h - 0.0108\,3\,R_vR_l + 0.210\,73\,R_hR_l - 8.004\,02 \times 10^{-3}R_v^2 + 5.217\,65\,R_h^2 - 0.276\,58\,R_l^2 - 5.668\,11 \times 10^{-3}R_vR_hR_l + 7.511\,08 \times 10^{-3}R_vR_l^2 + 8.793\,30 \times 10^{-5}R_v^3 - 1.551\,91R_h^3 \quad (3)$$

2.3.5 响应面模型验证

运用  $R^2$  检验、均方根误差 (root mean square error, RMSE) 标准<sup>[7, 11]</sup>进行响应面模型验证,检验响应面函数的精度,如表 3 所示。 $R^2$  值越接近 1,表明回归的响应面模型在试验设计空间内越准确地描述系统输入与输出的关系;而 RMSE 值则相反,其值越接近 0,表明模型越准确。由表 3 知, $R^2$  值均大于 0.94, RMSE 均小于 0.01,说明响应面函数计算值与真值之间的差异程度很小,回归的响应面模型准确有效。

2.3.6 模型优化

用三阶响应面模型代替有限元模型,将实测频率值作为各响应面函数对应的目标值。本算例共有 7 个目标函数,模型修正属于有约束非线性规划的多目标最优化问题。基于 Matlab 目标达到法进行优化,得到各阶频率,其与实测频率的比较如表 4 所示。修正后相对误差的最大值仅为 2.316%,较之修正前的 7.371% 下降很多,且各模态精度更均衡。

表 3 各响应面模型的精度检验值  
Tab.3 The accuracy result of response surface models

检验值	模态阶次						
	竖向一阶	竖向二阶	竖向三阶	横向一阶	纵向一阶	扭转一阶	扭转二阶
$R^2$	0.999 928	1.000 000	0.999 328	0.999 994	0.999 999	0.999 991	0.964 16
RMSE	0.000 055	0.008 474	0.000 278	0.000 059	0.000 031	0.005 975	0.001 458

表 4 响应面模型修正前后的频率与实桥频率的比较  
Tab.4 Comparison between the tested frequencies and that of RSM before and after model updating

模态阶次	实测频率/Hz ①	修正前频率/Hz ②	修正后频率/Hz ③	修正前相对误差/% (②-①)/①	修正后相对误差/% (③-①)/①
竖向一阶	21.537	21.894	21.972	1.658	2.020
竖向二阶	50.551	49.003	49.38	-3.062	-2.316
竖向三阶	79.341	78.687	79.037	-0.824	-0.383
横向一阶	9.524	10.226	9.525	7.371	0.010
纵向一阶	9.426	10.095	9.444	7.097	0.191
扭转一阶	27.990	27.983	28.122	-0.025	0.472
扭转二阶	71.058	70.215	70.519	-1.186	-0.759

3 结语

1) 选取支座竖向弹簧刚度  $R_v$ 、横向弹簧刚度  $R_h$  和纵向弹簧刚度  $R_l$  为修正参数,选取竖向前 3 阶、横向前 1 阶、纵向 1 阶、扭转 2 阶 7 个模态频率为响应;以 D-最优设计抽取样本点,用逐步回归法筛选显著自变量,最小二乘法确定多项式系数,构建有效的三阶多项式构造响应面函数。

2) 用响应面模型替代有限元模型进行模型优化,结果表明,修正后相对误差的最大值仅为 2.316%,较之修正前的 7.371% 下降很多,且各模态精度更均衡。因此,在建模及模型优化中采用高阶响应面方法,不但效率得到提高,优化的效果也能得到保证,研究结果对实际应用有参考价值。

参考文献:

[1] Cundy A L. Use of response surface meta-models in damage identification of dynamic structure[D]. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.

[2] Alaswad A, Olabi A G, Benyounis K Y. Integration of finite element analysis and design of experiments to analyze the geometrical factors in bi-layered tube hydroforming[J]. Materials and Design, 2011, 32(2): 838-850.

[3] 杜家政, 隋允康, 阳志光, 等. 基于响应面法的五心底结构形状优化[J]. 计算力学学报, 2011, 28(6): 839-843.

[4] 戴伟. 基于响应面方法的立管结构可靠性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.

[5] 张令弥. 复杂结构动态分析/试验/设计与计算仿真技术的进展与应用[J]. 强度与环境, 2005, 32(1): 1-9.

[6] 夏樟华. 基于静动力的桥梁结构有限元模型修正[D]. 福州: 福州大学, 2006.

[7] Douglas C. Montgomery, 实验设计与分析[M]. 傅珏生, 张健, 王振羽, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2009.

[8] 费庆国, 张令弥. 基于径向神经网络的有限元模型修正研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(6): 748-752.

[9] Orr M J. Recent advances in radial basis function networks[R]. London: Edinburgh University, 1999.

[10] Friedman J H. Multivariate additive regression splines[J]. Annals of Statistics, 1991, 19: 135-141.

[11] 鲍诺, 王春洁, 赵军鹏, 等. 基于响应面法的结构动力学模型修正[J]. 振动与冲击, 2013, 32(16): 54-58.

(责任编辑: 陈雯)