doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2015.04.017

秩与非零特征值个数的差为1或2的矩阵的性质

唐晓文[1]，杨忠鹏[2,3]，陈梅香[2,4]

（1. 福建工程学院 数理学院，福建 福州 350118；2. 莆田学院 数学学院，福建 莆田 351100；
3. 闽南师大 数学与统计学院，福建 漳州 363000；4. 福建师范大学 数学与计算机学院，福建 福州 350117）

摘要：以矩阵方幂的秩为基本工具，对秩与非零特征值个数的差为1或2的矩阵做了等价刻画。作为应用，只用矩阵的秩可给出相应矩阵的Jordan标准形。

关键词：矩阵秩；矩阵指数；非零特征值；Jordan标准形

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-4348(2015)04-0388-04

Characterization of matrices with the differences between ranks and numbers of non-zero eigenvalues being equal to 1 or 2

Tang Xiaowen[1], Yang Zhongpeng[2,3], Chen Meixiang[2,4]

(1. College of Mathematics and Physics, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China;
2. College of Mathematics, Putian University, Putian 351100, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China;
4. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China)

Abstract: With the rank of matrix square power as a basic tool, some equivalent characterization of matrices was presented, in which the differences between the rank and number of non-zero eigenvalues is equal to 1 or 2. As applications, Jordan canonical form of the matrices can be given simply by the rank of the matrices.

Keywords: matrix rank; matrix index; non-zero eigenvalue; Jordan form

$\mathbf{C}^{n\times n}$表示复数域$\mathbf{C}$上$n\times n$方阵集合。$\mathbf{N}$为非负整数集合。$r(\boldsymbol{A})$、$u(\boldsymbol{A})$、$m_A(x)$分别表示$\boldsymbol{A}$的秩、非零特征值的个数、最小多项式。约定$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$，也用$\boldsymbol{E}_k$表示$k\times k$单位矩阵。满足$r(\boldsymbol{A}^k)=r(\boldsymbol{A}^{k+1})$的最小$k\in\mathbf{N}$称为$\boldsymbol{A}$的指数，记$\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=k$（文献[1，定义2.1]，[2，定义3.5.5]，[3，定义2.1.10]）。由文献[4-6]知秩与非零特征值的个数相等的矩阵在数理统计、试验设计、多元统计分析、金融计量统计等统计分析中都有其应用背景。

当$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$时，如同文献[5-7]总设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}_A=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_t,\boldsymbol{J}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{J}_s)\tag{1}$$

其中$\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$可逆。

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}0&0\\ \boldsymbol{E}_{n_i-1}&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{N}_{n_i}\in\mathbf{C}^{n_i\times n_i}\tag{2}$$

其中$n_1\geqslant n_2\cdots\geqslant n_t\in\mathbf{N}$，$i=1,2,\cdots,t(\geqslant 0)$。

$$\boldsymbol{J}_j=\lambda_j\boldsymbol{E}_{n_j}+\boldsymbol{N}_{n_j}\in\mathbf{C}^{n_j\times n_j}\tag{3}$$

其中$\lambda_j\neq 0$，$j=t+1,t+2,\cdots,s$。

约定当$n_i=1$时$\boldsymbol{J}_i$是1阶的；当$t=0$时，$n_i=$

收稿日期：2015-07-13

基金项目：福建省自然科学基金项目（2015J01590）；福建省中青年教师教育科研项目（JA14277）；莆田学院教学研究项目（JG201415）

第一作者简介：唐晓文（1961-），女，黑龙江佳木斯人，教授，研究方向：矩阵理论及其应用。

$0, i=1,2,\cdots,t$；显然 $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$。

由文献[1]或文献[5-6]可知 $k = n_1 = \mathrm{ind}\boldsymbol{A}$，这样总设 $d_i(\geqslant 0) \in \mathbf{N}$ 为阶数是 $k-i+1$ 的幂零 Jordan 块的个数，因此 $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = t$；当 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 且 $k = \mathrm{ind}\boldsymbol{A}$ 时就有

$$k = n_1 = \cdots = n_{d_1} > n_{d_1+1} = \cdots = n_{d_1+d_2}(=k-1) > \cdots > n_{d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}+1} = n_{d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}+d_k}(=1) \tag{4}$$

文献[5]从矩阵 Jordan 标准形出发，得到秩和非零特征值个数的差的等式和不等式，文献[6]的定理 1 给出了进一步的结论：

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，如果 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A} = k$，则

$$0 \leqslant r(\boldsymbol{A}) - u(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}) - r(\boldsymbol{A}^k) = n_1 + n_2 + \cdots + n_1 - t = (k-1)d_1 + (k-2)d_2 + \cdots + d_{k-1} \leqslant n-1 \tag{5}$$

当 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant n-1$ 时，

$$d_1 = r(\boldsymbol{A}^{k-l}) - 2r(\boldsymbol{A}^{k-l+1}) + r(\boldsymbol{A}^{k-l+2}) \tag{6}$$

其中 $1 \leqslant l \leqslant k = \mathrm{ind}\ \boldsymbol{A}$。

设 $\boldsymbol{S}_l = \{\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n} \mid r(\boldsymbol{A}) - u(\boldsymbol{A}) = l\}, l \in \mathbf{N}$。文献[5]中定理 3 和 5 和文献[6]中定理 2 和 3 实际上给出了不等式(5)的上、下界等式成立(即 $\boldsymbol{S}_{n-1}$、$\boldsymbol{S}_0$)的多角度的等价描述。

周知，Jordan 标准形是矩阵理论及应用的有效工具。Horn R. A. 和 Johnson C. R. 指出："虽然推导 Jordan 标准形的过程是一个明确的算法，它在原则上可以用来计算一个已知矩阵的 Jordan 标准形，但是绝对不能指望用计算机对它自动实施数值计算。实际上并没有一个计算 Jordan 标准形的数值方法"[8]。

本文对一般的 $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ 给出等价刻画。与文献[5-6]不同的是，得到的结论可以不依赖已知矩阵 Jordan 标准形。

1　预备知识

引理 1　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

$$J_i^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n_i-l} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中 $1 \leqslant l \leqslant n_i - 1$ 且 $\boldsymbol{J}_i^l = 0, n_i \leqslant l, i = 1,2,\cdots,t$。

$$r(\boldsymbol{J}_j^l) = n(\boldsymbol{J}_j) = n_j \tag{8}$$

其中 $j = t+1, t+2, \cdots, s$。

证明　(7)由文献[5]引理 1，[6]中引理 1，[7]引理 2.1 或文献[9] Proposition 2.3 得到。从公式(3)知 $\boldsymbol{J}_j^l$ 是以 λ_j^t 为对角元素的下三角矩阵，$j = t+1, t+2, \cdots, s$，即(8)成立。■

引理 2　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

ⅰ) $\mathrm{ind}\boldsymbol{A} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆即 $r(\boldsymbol{A}^0) = r(\boldsymbol{A}^m) = n$，$m \in \mathbf{N}$；

ⅱ) $1 \leqslant \mathrm{ind}\boldsymbol{A} = k = n_1 \Leftrightarrow$ 存在 $1 \leqslant k \leqslant m \in \mathbf{N}$ 使得 $r(\boldsymbol{A}^{k-1}) > r(\boldsymbol{A}^k) = r(\boldsymbol{A}^m)$；

ⅲ) 如果存在 $1 \leqslant l \leqslant n-1$ 使得 $r(\boldsymbol{A}^l) \neq r(\boldsymbol{A}^{l+1})$，则 $l < \mathrm{ind}\boldsymbol{A}$；

ⅳ) 当 $r(\boldsymbol{A}^l) = r(\boldsymbol{A}^{l+1})$ 时，那么 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A} \leqslant l$；

ⅴ) $r(\boldsymbol{A}) > r(A^2) > \cdots > r(\boldsymbol{A}^{k-1}) > r(\boldsymbol{A}^k) = r(\boldsymbol{A}^m)$，$k \leqslant m$，当 $l \leqslant k = \mathrm{ind}\boldsymbol{A}$ 时。

证明　应用矩阵指数的定义和文献[2] Proposition 3.5.6 知 i)成立。

ⅱ) 当 $1 \leqslant \mathrm{ind}\boldsymbol{A} = k = n_1$ 时，从 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值知 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant n-1 < n$ 且 $1 \leqslant t$，由公式(1)，(7)，(8)知

$$r(\boldsymbol{A}^l) = \sum_{i=1}^{t} r(\boldsymbol{J}_i^l) + \sum_{j=t+1}^{s} r(\boldsymbol{J}_j^l) = \sum_{i=1}^{t} r(\boldsymbol{J}_i^l) + \sum_{j=t+1}^{s} n_j \tag{9}$$

其中 $l \in \mathbf{N}$。

再由公式(9)可得

$$r(\boldsymbol{A}^{n_1}) = \sum_{j=t+1}^{s} n_j = \sum_{i=1}^{t} r(\boldsymbol{J}_i^{n_1+(m-n_1)}) + \sum_{j=t+1}^{s} n_j = r(\boldsymbol{A}^m)$$

其中 $n_1 \leqslant m$；

$$r(\boldsymbol{A}^{n_1-1}) = d_1 + \sum_{j=t+1}^{s} n_j > \sum_{j=t+1}^{s} n_j = r(\boldsymbol{A}^{n_1})$$

即 $r(\boldsymbol{A}^{k-1}) > r(\boldsymbol{A}^k) = r(\boldsymbol{A}^m)$，其中 $1 \leqslant n_1 = k \leqslant m \in \mathbf{N}$。这说明总有 $r(\boldsymbol{A}^{n_l-1}) > r(\boldsymbol{A}^{n_1}) = r(\boldsymbol{A}^m)$，$n_1 \leqslant m$。当存在 $1 \leqslant k \leqslant m \in \mathbf{N}$ 使 $r(\boldsymbol{A}^{k-1}) > r(\boldsymbol{A}^k) = r(\boldsymbol{A}^m)$ 时，由矩阵指数定义知 $1 \leqslant \mathrm{ind}\boldsymbol{A} = k$；再从矩阵指数的唯一性知 $k = n_1$。

从文献[5]引理 4 可得结论ⅲ)和ⅳ)。从ⅱ)易知ⅴ)成立。■

由引理 2 的ⅱ)很容易得到文献[10]的结果。

由文献[8]定理 3.3.6 或文献[7]引理 2.2，应用引理 2 的ⅱ)可得到

引理 3　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则 $m_A(x) = x^k h(x)$，

$h(x)\in\mathbf{C}[x]$ 且 $h(0)\neq 0$, $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=k$。应用引理 1 和 2 的 ⅰ)可得到

引理 4 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，当 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=k$ 时，则 $r(\boldsymbol{A}^k)=\sum\limits_{j=t+1}^{s}n_j=u(\boldsymbol{A})$。

引理 5 （见文献[6,定理 2]）设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则如果下述等价：

ⅰ) $r(\boldsymbol{A})=u(\boldsymbol{A})$；

ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 可逆或属于零特征值的 Jordan 块的阶数都等于 1；

ⅲ) $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=0$ 或 1 且 $d_1=n-r(\boldsymbol{A})$。

2 主要结果

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则下述等价：

ⅰ) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_1$；

ⅱ) $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 且 $r(\boldsymbol{A})-1=r(\boldsymbol{A}^2)=r(\boldsymbol{A}^m)$，$m(\geqslant 2)$；

ⅲ) $r(A)-1=r(\boldsymbol{A}^2)=r(\boldsymbol{A}^m)$，$m(\geqslant 2)$；

ⅳ) $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 且 $d_1=1$, $d_2=n-1-r(A)$ ；

ⅴ) $m_A(x)=x^2h(x)$, $h(0)\neq 0$ 且 $r(\boldsymbol{A})-1=r(\boldsymbol{A}^2)=r(\boldsymbol{A}^m)$，$m(\geqslant 2)$。

证明 ⅰ)⇒ⅱ)的证明。当 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_1$ 时，由 $r(\boldsymbol{A})=u(\boldsymbol{A})+1\leqslant n$ 即 $u(\boldsymbol{A})\leqslant n-1<n$，说明此时 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，这样应用公式(1－4)和引理 5 知 $1\leqslant t$, $2\leqslant k=\mathrm{ind}\boldsymbol{A}$。

从(5)和引理 4 知 $r(\boldsymbol{A})=u(\boldsymbol{A})+1=r(\boldsymbol{A}^k)+1>r(\boldsymbol{A}^k)>$, $k=\mathrm{ind}\boldsymbol{A}$。

如果 $2<k$，由引理 2 的 Ⅴ)得 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^k)+1>r(\boldsymbol{A}^2)>r(\boldsymbol{A}^k)=r(\boldsymbol{A}^{k+1})$；从 $r(\boldsymbol{A}^2)>r(\boldsymbol{A}^k)$ 与 $r(\boldsymbol{A}^2)\geqslant r(\boldsymbol{A}^k)+1$ 等价，得 $r(\boldsymbol{A}^k)+1>r(\boldsymbol{A}^2)\geqslant r(\boldsymbol{A}^k)+1$，这个矛盾说明 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 且引理 2 的 ⅱ)和引理 4 得 $r(\boldsymbol{A})-1=r(\boldsymbol{A}^2)=r(\boldsymbol{A}^m)$，$(\geqslant 2)$。

ⅱ)⇒ⅲ)的证明是显然的。

ⅲ)⇒ⅳ)的证明。从 $r(\boldsymbol{A})-1=r(\boldsymbol{A}^2)=r(\boldsymbol{A}^m)$，$2\leqslant m$ 和引理 2 的 ⅱ)知 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$，再从(6)，

$$d_1=r(\boldsymbol{A})-2r(\boldsymbol{A}^2)+r(\boldsymbol{A}^{2+1})=1,$$

$$d_2=r(\boldsymbol{A}^{2-2})-2r(\boldsymbol{A}^{2-2+1})+r(\boldsymbol{A}^{2-2+2})=$$
$$r(\boldsymbol{A}^0)-r(\boldsymbol{A})-(r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2))=$$
$$n-r(\boldsymbol{A})-1$$

ⅳ)⇒ⅴ)的证明。当 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 且 $d_1=1$, $d_2=n-1-r(\boldsymbol{A})$ 时，由引理 2 和 3 知 $m_{\boldsymbol{A}}(x)=x^2h(x)$, $h(0)\neq 0$；从(6), $d_1=r(\boldsymbol{A})-2r(\boldsymbol{A}^2)+r(\boldsymbol{A}^{2+1})=r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2)=1$ 这样就有 $r(\boldsymbol{A})-1=r(\boldsymbol{A}^2)=r(\boldsymbol{A}^m)$，$m(\geqslant 2)$。

ⅴ)⇒ⅰ)的证明。从由引理 3 知 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$，再由 $r(\boldsymbol{A})-1=r(\boldsymbol{A}^2)$、公式(5)和引理 4 知 $r(\boldsymbol{A})-u(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2)=1$ 即 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_1$。■

由定理 1 可得简单实用的

推论 1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$满足(1－4)，则

$$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_1\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})-1=r(\boldsymbol{A}^2)=r(\boldsymbol{A}^m),(m\geqslant 2); \tag{10}$$

$$\boldsymbol{J}_A=\mathrm{diag}(N_2,0_{n-r(\boldsymbol{A})-1},\boldsymbol{J}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{J}_s)\text{ 当 }\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_1\text{ 时}, t=n-r(\boldsymbol{A}); \tag{11}$$

$$\boldsymbol{J}_A=\mathrm{diag}(N_2,0_{n+2})\text{，当幂零的 }\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_l\text{ 时。} \tag{12}$$

证明 由定理 1 的 ⅰ)与ⅲ)的等价，可得(10)。从定理 1 的 ⅰ)与ⅳ)的等价知(11)成立。由[11,定理 5.1]知 $\boldsymbol{A}$ 为幂零⇔$\boldsymbol{A}$ 的特征值都为零；进而应用(11)得(12)。■

如果 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$的 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=k$，则有唯一的 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$, $\boldsymbol{A}^{k+1}X=\boldsymbol{A}^k$，称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^D$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆(见文献[2]的 6.2 节，文献[3]的定义 2.1.2)。

推论 2 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_1$ 满足(1－4)，则

$$\boldsymbol{A}^D=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(0_q,\boldsymbol{J}_{t+1}^{-1},\cdots,\boldsymbol{J}_s^{-1})\boldsymbol{P}^{-1},$$
$$q=n-r(\boldsymbol{A})+1 \tag{13}$$

证明 将公式(13)的右边 $P\mathrm{diag}(0_q,\boldsymbol{J}_{t+1}^{-1},\cdots,J_s^{-1})\boldsymbol{P}^{-1}$与(11)带入 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆的定义所要求的三个方程，从 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆的唯一性知(13)成立。■

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则下述等价

ⅰ) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_2$；

ⅱ) $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2$, $2\leqslant m$；或 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=3$，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+1=r(\boldsymbol{A}^3)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2$, $3\leqslant m$；

ⅲ) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2$, $2\leqslant m$ 或 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+1=r(\boldsymbol{A}^3)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2$, $3\leqslant m$；

ⅳ) $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 且 $d_1=2$, $d_2=n-r(\boldsymbol{A})-2$ 或 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=3$ 且 $d_1=1$, $d_2=0$, $d_3=n-r(\boldsymbol{A})-1$；

证明 ⅰ)⇒ⅱ)的证明。当 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_2$ 时，由 $r(\boldsymbol{A})=u(\boldsymbol{A})+2\leqslant n$ 即 $u(\boldsymbol{A})\leqslant n-2<n$，说明此时 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，这样应用(1－4)和引理5 知 $1\leqslant t$ 且

$2\leqslant k=\mathrm{ind}\boldsymbol{A}$。

如果 $2=\mathrm{ind}\boldsymbol{A}$，从引理4和(5)得 $r(\boldsymbol{A})=u(\boldsymbol{A})+2=r(\boldsymbol{A}^2)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2,m(\geqslant 2)$。

如果 $3=\mathrm{ind}\boldsymbol{A}$，从公式(5)，公式(6)和引理4得 $r(\boldsymbol{A})=u(\boldsymbol{A})+2=r(\boldsymbol{A}^3)+2$ 且由引理2的ⅴ)得，$r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{A}^2)+1\geqslant r(\boldsymbol{A}^3)+2=r(\boldsymbol{A})$ 即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+1=r(\boldsymbol{A}^3)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2,m(\geqslant 3)$.

此时必是 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=k\leqslant 3$，否则 $4\leqslant\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=k$；从(5)和引理2的Ⅴ)得 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{A}^2)+1\geqslant r(\boldsymbol{A}^3)+2>r(\boldsymbol{A}^k)+2=r(\boldsymbol{A})$，矛盾。

ⅱ)⇒ⅲ)的证明是显然的。

ⅲ)⇒ⅳ)的证明。当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2,m(\geqslant 2)$ 时，从引理2的ⅱ)知 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$，再由公式(6)

$$d_1=r(\boldsymbol{A})-2r(\boldsymbol{A}^2)+r(\boldsymbol{A}^{2+1})=2,$$

$$d_2=r(\boldsymbol{A}^0)-2r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^2)=n-r(\boldsymbol{A})-2,$$

当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+1=r(\boldsymbol{A}^3)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2,m(\geqslant 3)$，即 $r(\boldsymbol{A}^2)>r(\boldsymbol{A}^3)=r(\boldsymbol{A}^m),m(\geqslant 3)$ 时，从引理2的ⅱ)的知 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=3$，进而由公式(6)，

$$d_1=r(\boldsymbol{A}^2)-2r(\boldsymbol{A}^3)+r(\boldsymbol{A}^4)=1,$$

$$d_2=(r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2))-(r(\boldsymbol{A}^2)-r(\boldsymbol{A}^3))=0$$

$$d_3=(r(\boldsymbol{A}^0)-r(\boldsymbol{A}))-(r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2))=n-r(\boldsymbol{A})-1$$

ⅳ)⇒ⅰ)的证明。当 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 且 $d_1=2$，$d_2=n-r(\boldsymbol{A})-2$ 时，从公式(5)、公式(6)和引理4可得：

$$d_1=r(\boldsymbol{A})-2r(\boldsymbol{A}^2)+r(\boldsymbol{A}^{2+1})=r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2)=2=r(\boldsymbol{A})-u(\boldsymbol{A})$$

当 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=3$ 且 $d_1=1,d_2=0,d_3=n-r(\boldsymbol{A})-1$ 时，由(6)，$d_1=r(\boldsymbol{A}^2)-2r(\boldsymbol{A}^3)+r(\boldsymbol{A}^4)=r(\boldsymbol{A}^2-r(\boldsymbol{A}^3)=1$，进而从 $d_2=(r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2))-(r(\boldsymbol{A}^2)-r(\boldsymbol{A}^3))=0$ 知 $r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A})^2=1$；这样从(5)和引理4，$r(\boldsymbol{A})-u(\boldsymbol{A})=(r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A}^2))+(r(\boldsymbol{A}^2)-r(\boldsymbol{A}^3))=2$。这就证明了 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_2$。■

推论3　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，满足(1-4)，则

ⅰ) $\boldsymbol{A}\in S_2\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2$，$2\leqslant m$ 或 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)+1=r(\boldsymbol{A}^3)+2=r(\boldsymbol{A}^m)+2,3\leqslant m$；

ⅱ)如果 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_2$，那么

$$\boldsymbol{J}_A=\mathrm{diag}(\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2,0_{n-r(A)-2},\boldsymbol{J}_{t+1},\cdots\boldsymbol{J}_s),t=n-r(\boldsymbol{A}),\text{当 ind}\boldsymbol{A}=2\text{ 时；}\tag{14}$$

$$\boldsymbol{J}_A=\mathrm{diag}(N_3,0_{n-r(A)-1},\boldsymbol{J}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{J}_s),t=n-r(\boldsymbol{A}),\text{当 ind}\boldsymbol{A}=3\text{ 时；}\tag{15}$$

ⅲ)如果幂零的 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_2$，那么当 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=2$ 时

$$\boldsymbol{J}_A=\mathrm{diag}(N_2,N_2,0_{n-4})\tag{16}$$

当 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=3$ 时

$$\boldsymbol{J}_A=\mathrm{diag}(N_3,0_{n-3})\tag{17}$$

证明　由定理2的ⅰ)与ⅲ)的等价，可得ⅰ)。从定理2的ⅰ)与ⅳ)的等价知(14)，(15)成立。应用推论1证明的理由和(14)，(15)可得到(16)，(17)。■

推论4　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_2$ 满足(1-4)，则

$$\boldsymbol{A}^D=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(0_q,\boldsymbol{J}_{t+1}^{-1},\cdots,\boldsymbol{J}_s^{-1})\boldsymbol{P}^{-1},\quad q=n-r(\boldsymbol{A})+2。\tag{18}$$

证明　类似推论2的证明，将(18)的右边 $\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(0_q,\boldsymbol{J}_{t+1}^{-1},\cdots,\boldsymbol{J}_s^{-1})\boldsymbol{P}^{-1}$ 与(14)，(15)带入 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆的定义所要求的3个方程，从 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆的唯一性知(18)成立。■

例1　从文献[12，例1]知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}17&13&-1&0\\-24&-19&1&-2\\-29&-28&-2&-18\\14&12&0&4\end{bmatrix}$ 是幂零的，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零即 $u(\boldsymbol{A})=0$。从初等变换得的 $r(\boldsymbol{A})=2(=r(\boldsymbol{A})-u(\boldsymbol{A}))$ 可知 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{S}_2$，易知 $\boldsymbol{A}^2$ 的对角元素(1,1)是非零的，注意 $\boldsymbol{A}$ 是幂零的；这样从引理2的ⅱ)和Ⅴ)知 $\mathrm{ind}\boldsymbol{A}=3$，进而由公式(17)知 $J_A=\mathrm{diag}(\boldsymbol{N}_3,0)$。

参考文献：

[1] Nikuie M, Mirnia M K, Mahmoudi Y. Some results about the index of matrix and Drazin inverse[J]. Mathematical Sciences,2010,4(3):83-294.

[2] Bernstein D S. Matrix mathematics theory, facts, and formulas[M]. 2nd edi. Princeton:Princeton University press,2009.

[3] Wang G, Wei Y, Qian S. Generalized Inverse Theory and Computations[M]. Beijing:Science Press,2003.

[4] 张景晓.矩阵的秩与其非零特征值个数相等的条件[J].德州学院学报,2012,28(4):6-8.

(下转第408页)

星期一效应,且随着窗口长度的增加,星期一效应的持续时间更长。上证指数持续下跌,星期一效应消失。(3)在 2005 年至 2008 年期间,星期一、星期三效应最为显著,进入 2009 年后,星期一、二、三、五均不显著。星期四效应在 2012 年以后为负且持续存在,国内学者尚未发现这一奇特现象。(4)末期出现了显著为正的星期五效应。(5)中国股市星期效应的确认与估计与所使用的样本空间关系密切,不同的估计方法会产生不同的结果。(6)星期效应的样本参与率图具有强烈的、直观的功效,可以帮我们准确发现哪些点或者哪些区间对星期效应影响较大。(7)在股指期货推出后至 2014 年年底,不管滚动窗口长度如何,星期一、二、三效应均不显著。

参考文献:

[1] Fama E F. The behaviour of stock prices[J]. Journal of the Business,1965,38(1):34 -105.
[2] Keim D B,Stambough R F. Further investigation of the weekend in stock return[J]. Journal of Finance,1987,39(3):819 -840.
[3] 俞乔. 市场有效、周期异常与股价波动——对上海、深圳股票市场的实证分析[J]. 经济研究,1994(9):43 -50.
[4] 戴国强,陆蓉. 中国股票市场的周末效应检验[J]. 金融研究,1999(4):48 -54.
[5] 奉立城. 中国股票市场的周内效应[J]. 经济研究,2000(11):50 -57.
[6] 张兵. 中国股市日历效应研究:基于滚动样本检验的方法[J]. 金融研究,2005(7):33 -44.
[7] 严太华,齐颂超. 股市的节日效应探源:基于上证综指和深证成指收益率[J]. 改革,2011(2):124 -128.
[8] 陈文俊,胡婷. 沪市农业板块规模效应和月份效应的实证研究[J]. 中央财经大学学报,2012(10):43 -48.
[9] 韩国文,刘安坤. 沪深股市周内效应再检验[J]. 重庆大学学报,2014,20(3):33 -41.
[10] 沈冰,廖杰,余函. 中国股票市场月份效应的实证研究[J]. 财经问题研究,2014(6):57 -62.

(责任编辑: 肖锡湘)

(上接第 391 页)

[5] 梁小春,陈梅香,杨忠鹏,等. 矩阵的秩和非零特征值个数关系的进一步讨论[J]. 闽南师范大学学报:自然科学版,2014,27(2):1 -6.
[6] 吕洪斌,杨忠鹏,冯晓霞. 矩阵的秩和非零特征值个数差的确定[J]. 吉林大学学报:理学版,2014,52(6):1210 -1214.
[7] Chen Mei-Xiang, Lü Hong-Bin, Feng Xiao-Xia, et al. The essential (m, l)-idempotent matrix and its minimal polyno-mial[J]. International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2013,41(11):31 -41.
[8] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. New York:Cambridge University Press,1985.
[9] Wu Yan, Linder D F. On the eigenstructures of functional K-potent matrices and their integral forms[J]. WSEAS Trans Math, 2010,9(4):244 -253.
[10] 胡付高,杨娇. 幂零矩阵的一个性质[J]. 高等数学研究,2011,14(3):52 -54.
[11] Zhang Fuzhen. Matrix Theory: Basic Results and Techniques[M]. 2nd edi. Berlin:Springer, 2011.
[12] 廖小莲,伍征斌,陈国华. k -幂零矩阵的一个新性质[J]. 湖南人文科技学院学报,2011(2):71 -73.

(责任编辑: 陈雯)