

基于灰色模型的建筑物沉降预测方法

邹为彬, 袁玉珠

(福建工程学院 交通运输学院, 福建 福州 350118)

摘要: 针对灰色模型在建筑物沉降预测中存在的不足,对传统的灰色模型进行改进,提出利用时间差法和 Newton 插值法将非等间距的原始数据序列转换为等间距数据序列,然后采用 GM(1,1) 模型和两种加权法对等间距数据进行建模的预测方法。并通过实例进行精度分析,实例证明利用 Newton 插值法构造等间距数据,采用基于时间加权的模型对沉降进行预测具有较高的精度。采用该模型对建筑物沉降趋势进行预测,为施工决策起到良好的参考作用。

关键词: 预测; 灰色模型; 沉降; Newton 插值法

中图分类号: P25

文献标志码: A

文章编号: 1672-4348(2015)04-0351-06

Grey model based prediction (modelling) method of buildings settlement

Zou Weibin, Yuan Yuzhu

(College of Communication and Transportation, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China)

Abstract: To improve the performance of grey model in predicting buildings settlement, the time difference method and Newton interpolation method were adopted to transform non-equidistant data sequence into equidistant data sequence. The GM (1,1) and two weighting methods were employed to predict the buildings settlement. The precision analysis by an example demonstrates that using Newton interpolation method to construct equidistant data combined with the time-weighted model is of high prediction accuracy. The results indicate that the model is applicable in buildings settlement prediction and can contribute to decision-making in construction.

Keywords: prediction; gray model; settlement (subsidence); Newton interpolation method

变形监测分析与预报对确保工程建筑物的安全极为重要,也是信息化施工的前提。变形监测研究的理论和方法很多,但是由于变形体变形机理的错综复杂性和多样性^[1],需要寻找适宜特定工程的预测模型。自20世纪80年代初邓聚龙教授创立了灰色系统理论以来^[2],灰色系统理论在变形监测领域得到了较普遍的应用和广泛重视。灰色模型的已有研究主要是研究非等间距数据等间距化^[1,3]和研究背景值构造方法,其中以背景值构造方法的研究居多,如:加权法重构背景值^[4-7]、Newton-cores 重构背景值^[8-9]、非齐次

指数函数拟合累加生成序列重构背景值^[10]等,这些方法在针对相应文献中的数据都有较高的预测精度。但是传统的灰色模型也有不足之处,比如原点误差越大,建立起来的模型越容易失真;初始数据序列的光滑度对灰色模型预测精度影响较大;初始数据系列的长度对灰色模型预测精度的影响较大。本文结合工程实际情况,对传统的灰色模型进行了改进,采用时间差系数修正和 Newton 插值的方法获得等间距数据分别构造背景值,然后构造普通模型和两种加权模型进行预测,并对模型预测值进行精度比较。

1 模型分析

1.1 传统 GM(1,1) 模型

设有原始观测数据序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\} \quad (1)$$

其中, n 为数据个数, $x^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ 。

对 $X^{(0)}$ 作一次累加生成, 得到新的数据序列

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\} \quad (2)$$

$X^{(1)}$ 的 GM(1,1) 模型白化形式的微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = b \quad (3)$$

GM(1,1) 模型的灰微分方程为

$$X^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, k = 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

其中, a, b 为待定参数, $z^{(1)}(k)$ 为背景值。

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2} (x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

若令 $\hat{a} = (a, b)^T$, 则待辨识参数向量 \hat{a} 由最小二乘法求得

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (6)$$

其中,

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} X^{(0)}(2) \\ X^{(0)}(3) \\ \vdots \\ X^{(0)}(n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

方程式(3)的离散解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - b/a)e^{-ak} + b/a \quad (8)$$

则原始数据 $x^{(0)}(k+1)$ 的拟合值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad (9)$$

1.2 非等间距数据的处理模型

1.2.1 时间差系数法内插等间距数据序列

设式(1)中的原始观测数据为非等间距数据, 则各观测数据序列与首次观测数据的时间间隔为 $T_i, i = 2, 3, \dots, n$ 。其平均时间间隔为

$$\Delta t = \frac{1}{n-1} T_n \quad (10)$$

各期的观测时间与平均时间 Δt 的单位时间差系数为

$$\mu(i) = \frac{T_i - (i-1)\Delta t}{\Delta t}, i = 2, 3, \dots, n \quad (11)$$

则可以得到等间隔的内插观测值:

$$x^{(0)}(i)' = x^{(0)}(i) - \Delta x^{(0)}(i), i = 2, 3, \dots, n \quad (12)$$

其中, $\Delta x^{(0)}(i) = \mu(i) (x^{(0)}(i) - x^{(0)}(i-1)), i = 2, 3, \dots, n; x^{(0)}(1)' = x^{(0)}(1)$ 。

1.2.2 Newton 插值法内插等间距数据序列

由 Newton 插值定义知, $f[x_0, x_k] =$

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \text{ 为函数 } f(x) \text{ 关于点 } x_0, x_k \text{ 的一阶均差, } f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-3}, x_{k-1}] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}]}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

为 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶均差, $f[x_0, x_1, \dots, x_k] =$

$$\frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为 $f(x)$ 的 k 阶均差。

设 x 为监测期间某一等间距时间, 由 Newton 插值公式可得 x 时刻的拟合值:

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (13)$$

1.3 构造背景值

1.3.1 加权法构造背景值

由式(5)可知, GM(1,1) 模型的背景值 $z^{(1)}(k)$ 是 $x^{(1)}(k)$ 和 $x^{(1)}(k-1)$ 的平均值。由图1可知, 构造值可以看作是 $k-1$ 至 k 之间的梯形面积, 而 GM(1,1) 模型拟合曲线是指数曲线, 因此 $z^{(1)}(k)$ 构造的背景值将有 ΔS 的误差。为了减小误差, 将 $k-1$ 至 k 分成 n 个小区间的梯形来代替实际的曲线面积以提高 $z^{(1)}(k)$ 的精度。式(14)构造了一个确定等分数 n 的经验公式:

$$n = \left(\sum_{i=2}^N R_i \right)^{\frac{1}{N-1}} + (N-1) \quad (14)$$

其中, N 为原始序列数据个数, 且

$$R_i = \frac{x^{(1)}(i)}{x^{(1)}(i-1)}, i = 2, 3, \dots, N \quad (15)$$

则 n 个小区间的面积之和和构造新的背景值为

$$z^{(1)}(k) = S_n = \frac{1}{2n} [(n+1)x^{(1)}(k-1) + (n-1)x^{(1)}(k)], \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (16)$$

1.3.2 基于时间加权法构造背景值

由于在构造背景值时没有区分所有的原始数

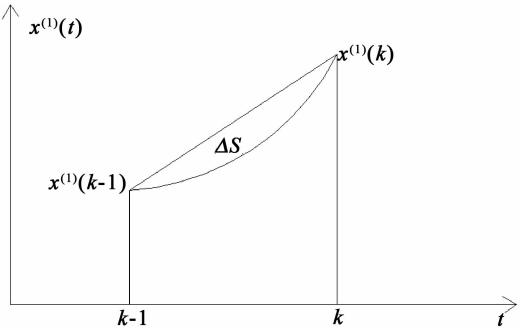


图1 背景值构造原理图

Fig.1 Structure schematic of background value

据,文献[7]提出了由时空因素确定权值的方法,认为距现在时刻越近的数据对预测系统辨识值具有较大的影响。设 t_n 时刻与 t_i 时刻的时间间距为

$$D_{ni} = t_b - t_i \tag{17}$$

本文讨论的数据序列已按照式(12)和(13)转换为等间距序列,因此可以设 $t_n = n, t_i = i$,则式(17)可表示为

$$D_{ni} = n - i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \tag{18}$$

利用高斯函数产生 t_i 时刻一次累加值在 t_n 时刻的权值^[7]:

$$Q_{ii} = \exp(1 - D_{ni}^2) = \exp(1 - (n - i)^2) \tag{19}$$

可以建立权值矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_{n-1n-1} \end{pmatrix} \tag{20}$$

则待辨识参数向量 \hat{a} 的最小二乘求解公式(6)将变为

$$\hat{a} = (B^T Q B)^{-1} B^T Q Y \tag{21}$$

利用新的辨识参数建立预测模型将突出时间因素,强调新信息的作用。

1.4 精度分析

预测模型的精度是工程中预测结果可靠性的保证。相对误差检验法和后验差检验法是判断灰色模型预测精度的直接指标。

(1) 相对误差检验法

设按GM(1,1)建模法求出 $\hat{X}^{(1)}$,并对 $\hat{X}^{(1)}$ 作一次累减得到 $\hat{X}^{(0)}$,则有模型预测序列:

$$\hat{X}^{(1)} = [\hat{X}^{(0)}(1), \hat{X}^{(0)}(2), \dots, \hat{X}^{(0)}(n)] \tag{22}$$

计算残差得

$$E = [e(1), e(2), \dots, e(n)] = X^{(0)} - \hat{X}^{(0)} \tag{23}$$

其中, $e(k) = x^{(0)}(k) - \hat{X}^{(0)}, k = 1, 2, \dots, n$ 。

则相对误差为

$$\text{rel}(k) = \frac{e(k)}{x^{(0)}(k)} \times 100\%, k = 1, 2, \dots, n \tag{24}$$

平均相对误差为

$$\text{rel} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\text{rel}(k)| \tag{25}$$

(2) 后验差检验法

原始序列 $X^{(0)}$ 的方差为

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x^{(0)}(k) - \bar{x}]^2 \tag{26}$$

残差序列 E 的方差为

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [e(k) - \bar{e}]^2 \tag{27}$$

计算后验差比为

$$C = S_2/S_1 \tag{28}$$

计算小误差概率为

$$p = P\{|e(k) - \bar{e}| < 0.6745S_1\} \tag{29}$$

根据精度检验等级参考表(见表1)则可以确定模型的精度等级。

表1 模型精度等级

Tab.1 Model precision grade

模型精度等级	均方差比值 C	小误差概率 p	结果
1 级	$C \leq 0.35$	$0.95 \leq p$	优秀
2 级	$0.35 < C \leq 0.5$	$0.80 \leq p < 0.95$	良好
3 级	$0.5 < C \leq 0.65$	$0.70 \leq p < 0.80$	及格
4 级	$0.65 < C$	$P < 0.70$	不及格

2 工程实例分析

本工程为福建省福州市平潭海峡大桥入区服务楼,该楼为四层框架结构,片筏基础,一层地下室,地基采用CFG桩处理,形成复合地基。地基由海湾吹砂方式回填而成,其基础地质自上而下为:吹填砂4~5 m、淤泥质土5~18 m、粉质粘土等。工程于2013年10月份主体封顶后开始进行装修,2014年1月份将进入外立面干挂大理石施工阶段。自2013年12月份以来,整栋建筑物的累积沉降量仍在增加,为了了解建筑物的沉降趋

势并判断建筑物安全性,需对建筑物的沉降趋势进行预测。

平潭海峡大桥入区服务楼总共布设了 10 个变形监测点(见图 2),其中第 9 点的变形值最大,因此决定对第 9 点的数据进行分析,以确定模型精度。

对原始观测数据利用式(12)和式(13)内插得到等间距数据,然后利用 GM(1,1)模型、加权法 GM(1,1)模型和基于时间加权的 GM(1,1)模型分别建模,并进行精度分析。

本文利用 12 月份的五次观测数据,计算得到辨识参数向量 \hat{a} 的待定参数 a 、 b 的值如表 2 所示。

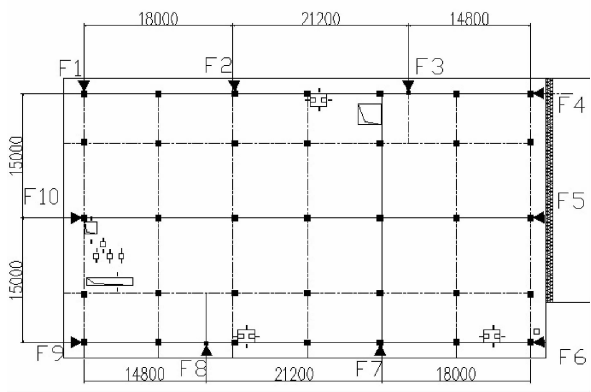


图 2 监测点位分布图
Fig. 2 Distribution of monitoring points

表 2 不同模型参数计算结果
Tab. 2 Calculation result of different model parameters

待定参数	GM(1,1)模型		加权法		基于时间加权法	
	时间差系数	Newton 插值	时间差系数	Newton 插值	时间差系数	Newton 插值
a	-0.073 142 4	-0.065 029 8	-0.073 634 5	-0.065 419 9	-0.066 663 6	-0.065 544 7
b	135.466 368 8	140.355 714 8	136.384 366 1	141.199 931 1	139.407 127 6	139.839 884 6

为了评定预测模型的精度,需要模型拟合出相应日期的模型值,不同模型计算出的模型值见表 3。由于建立模型时的数据已经转换为等间距序列,因此根据式(8)和式(9)可以得到:

$$\hat{x}^{(0)}(t_i) = (x^{(0)}(1) - b/a)(e^{-a} - 1)e^{-a(t_i - \Delta t)/\Delta t}$$

(30)

其中, t_i 为需要计算变形值的日期距第一个观测日期的时间间隔。模型精度见表 4。

表 5 和表 6 为模型预测值与后续观测值的比较。

表 3 不同模型计算值
Tab. 3 Calculation value of different models

观测时间	模型计算值/mm						
	原始观测数据/mm	GM(1,1)时 间差模型 (模型一)	GM(1,1) Newton 模型 (模型二)	加权时间差 模型 (模型三)	加权 Newton 模型 (模型四)	基于时间加权 时间差模型 (模型五)	基于时间加权 Newton 模型 (模型六)
2013-12-04	139.29	140.455	144.659	141.372	145.501	143.845	144.192
2013-12-07	146.22	145.278	149.067	146.295	149.961	148.339	148.621
2013-12-18	167.37	164.420	166.408	165.669	167.517	166.055	166.055
2013-12-23	174.90	173.936	174.944	175.324	176.163	174.792	174.642
2013-12-30	187.58	188.191	187.635	189.793	189.022	187.802	187.415

表 4 不同模型计算精度
Tab.4 Calculation precision of different models

精度指标	观测时间	模型计算精度/mm					
		GM(1,1)时 间差模型	GM(1,1) Newton 模型	加权时间 差模型	加权 Newton 模型	基于时间加权 时间差模型	基于时间加权 Newton 模型
相对 误差/%	2013-12-04	-0.84	-3.85	-1.49	-4.46	-3.27	-3.52
	2013-12-07	0.64	-1.95	-0.05	-2.56	-1.45	-1.64
	2013-12-18	1.76	0.57	1.02	-0.09	0.79	0.79
	2013-12-23	0.55	-0.03	-0.24	-0.72	0.06	0.15
	2013-12-30	-0.33	-0.03	-1.18	-0.77	-0.12	0.09
平均误差/%		0.82	1.29	0.80	1.72	1.14	1.24
后验差比 C		0.081 0	0.145 4	0.080 1	0.133 8	0.125 4	0.140 1
小误差概率 p		1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
精度等级		1 级	1 级	1 级	1 级	1 级	1 级

表 5 不同模型预测值比较
Tab.5 Comparison of prediction values among different models

观测时间	原始观 测数据/ mm	模型预测值/mm					
		GM(1,1)时 间差模型	GM(1,1) Newton 模型	加权时间 差模型	加权 Newton 模型	基于时间加权 时间差模型	基于时间加权 Newton 模型
2014-01-03	194.76	196.855	195.296	198.591	196.787	195.667	195.129
2014-01-06	201.70	203.614	201.247	205.456	202.819	201.781	201.122
2014-01-10	208.17	212.988	209.464	214.980	211.151	210.231	209.401

表 6 不同模型预测值精度比较
Tab.6 Accuracy comparison among prediction values with different models

精度指标	观测时间	模型计算精度/mm					
		GM(1,1)时 间差模型	GM(1,1) Newton 模型	加权时间 差模型	加权 Newton 模型	基于时间加权 时间差模型	基于时间加权 Newton 模型
相对 误差 / %	2014-01-03	-1.08	-0.28	-1.97	-1.04	-0.47	-0.19
	2014-01-06	-0.95	0.22	-1.86	-0.55	-0.04	0.29
	2014-01-10	-2.31	-0.62	-3.27	-1.43	-0.99	-0.59
平均误差 / %		1.45	0.14	0.89	0.38	0.19	0.13
后验差比 C		0.200 8	0.123 1	0.211 7	0.129 1	0.136 0	0.126 2
小误差概率 p		0.67	1.00	0.67	1.00	1.00	1.00
精度等级		不合格	1 级	不合格	1 级	1 级	1 级

通过上面的预测结果的对比分析我们可以得到:

1)由表(3)和表(4)可以看出,各模型的后验差比值 C 均在 0.15 以内,均具有较高的精度。采用时间差法和 Newton 插值法进行等间距数列构造后,采用基于时间加权模型计算的结果平均误

差很小,精度高。

2)由表(5)和表(6)可看出,时间差法内插的等间距数据利用 GM(1,1)模型和加权法建模后,2014-01-10 的预测值残差分别为 4.82 和 6.81 mm,大于式(29)计算的 4.46 和 4.53 mm 的要求,而 Newton 插值法内插的等间距数据在 3 种模型下都能满足精度要求。

因此,在对非等间隔的数据序列进行预测时,利用时间差法和 Newton 插值法将非等间距的原始数据序列转换为等间距数据序列,然后采用 GM(1,1)模型和两种加权法对等间距数据进行建模预测,可以提高预测精度。

从 2013-12-04~2014-01-10 的观测数据与 6 种模型计算值比较见图 3。

3 结论

结合某建筑物沉降观测数据,分别采用了几种改进灰色模型进行了建模预测,由分析可知利用 Newton 插值处理非等间距数据在传统灰度模

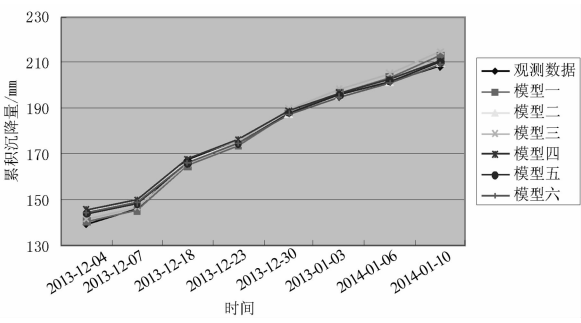


图 3 模型计算值与观测值比较图

Fig. 3 Comparison between observation value and prediction value

型和加权模型中都能达到精度要求,而基于时间加权预测计算模型则充分考虑了时间因素,增加了近期数据的权重,可以更好地预测变形体的变形量。因此,基于时间加权的 Newton 模型针对本工程有最优的预测效果,同时本模型对类似工程将有较好的借鉴作用。

参考文献:

[1] 黄声享,李志成. 工程建筑沉降预测的非等间距灰色建模[J]. 地理空间信息,2004,2(1):41-43.

[2] 刘思峰,郭天榜,党耀国,等. 灰色系统理论及应用[M]. 北京:科学出版社,1999.

[3] 李斌,朱健. 非等间隔灰色 GM(1,1)模型在沉降数据分析中的应用[J]. 测绘科学,2007,32(4):52-55.

[4] 李晓红,靳晓光,亢会明,等. GM(1,1)优化模型在滑坡预测预报中的应用[J]. 山地学报,2001,19(3):265-269.

[5] 周世健,赖志坤,臧德彦,等. 加权灰色预测模型及其计算实现[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2002,27(5):451-455.

[6] 何习平,华锡生,何秀凤. 加权多点灰色模型在高边坡变形预测中的应用[J]. 岩土力学,2007,28(6):1187-1191.

[7] 徐南. 基于时间加权的改进灰色预测模型及其应用[J]. 科技创新导报,2012,22:6-8.

[8] 李翠凤,戴文战. 非等间距 GM(1,1)模型背景值构造方法及应用[J]. 清华大学学报:自然科学版,2007,47(S2):1729-1732.

[9] 王晓佳,杨善林. 基于组合插值的 GM(1,1)模型预测方法的改进与应用[J]. 中国管理科学,2012,20(2):129-134.

[10] 王叶梅,党耀国,王正新. 非等间距 GM(1,1)模型背景值的优化[J]. 中国管理科学,2008,16(4):159-162.

(责任编辑:肖锡湘)