doi:10.3969/j.issn.1672-4348.2018.06.017

范畴的理想及其应用

冯清

(福建师范大学福清分校 电子与信息工程学院,福建 福清 350300)

摘要: 刻画了函子范畴 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ 、回路范畴 $\Omega\mathfrak{R}$ 、推出范畴 $\mathfrak{R}^{o}$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想之间的关系。证明了函子范畴 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想可相互确定,回路范畴 $\Omega\mathfrak{R}$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想可相互确定,范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想可构造推出范畴 $\mathfrak{R}^{o}$ 的理想。

关键词: 范畴的理想;函子范畴;回路范畴;推出范畴

中图分类号: O154.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-4348(2018)06-0609-04

The ideal of category and its applications

FENG Qing

(School of Electronic and Information Engineering, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuqing 350300, China)

Abstract: The relationship between the functor category $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$, loop category $\Omega\mathfrak{R}$, pushout category $\mathfrak{R}^{o}$ and the ideals of category $\mathfrak{R}$ was described. It was also verified that the ideals of functor category $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ and that of category $\mathfrak{R}$ can be determined by each other, and the ideals of loop category $\Omega\mathfrak{R}$ and that of category $\mathfrak{R}$ can be determined by each other. Moreover, the ideals of category $\mathfrak{R}$ can construct that of pushout category $\mathfrak{R}^{o}$.

Keywords: ideal of category; functor category; loop category; pushout category

环的理想在环论中有着重要的地位,得到广泛的重视和研究。如今,范畴化的思想已经渗入到数学的各个领域,Ross Street 将环的理想提升到范畴的理想[1],受此启发,本文讨论了函子范畴 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ 、回路范畴 $\Omega\mathfrak{R}$ 、推出范畴 $\mathfrak{R}^{o}$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想之间的关系。

1 函子范畴的理想

函子范畴是范畴理论发展的一个重要分支,任意给定的范畴均可视为函子范畴,如 G - 集范畴、积范畴、直向图范畴等等。本节讨论函子范畴 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想之间的关系。

先给出范畴的理想、函子范畴的定义[1-3]。

定义1.1[1] 设 $\mathfrak{R}$ 是加法范畴, $\mathfrak{R}$ 中的一个态射类 I 称为双边理想,若满足(1) I 中态射 f,g 有 $f+g\in I$ (2) I 中态射 f , $\mathfrak{R}$ 中态射 u,v 有 $uf\in I$, $fv\in I$ (其中, uf,fv 在 $\mathfrak{R}$ 中可合成)。

本文所有的理想均指双边理想。

例子 1.2 设 R 为环,把 R 作为单对象范畴记为 $\mathfrak{R}$ (即 $\mathrm{ob}\mathfrak{R}=\{R\}$, $\mathrm{mor}\mathfrak{R}=\{a\mid a\in R\}$,态射的合成为 R 中元素的乘法),容易验证,范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想和环 R 的理想一致。

定义1.3[2] 设 $\mathfrak{I}$ 是小范畴, $\mathfrak{R}$ 是范畴,定义函子范畴 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ 如下:

$\mathrm{ob}\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}=\{L:P\to Q$ 为共变函子$\}$, $\hom_{\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}}(L,M)=\{\lambda:L\to M$ 为自然变换$\}$,合成是自然变换的合成。

引理1.4[3] 设 $\mathfrak{I}$ 为小范畴, $\mathfrak{R}$ 为加法范畴,则函子范畴 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ 是加法范畴。

下面给出函子范畴 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{I}}$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理

收稿日期: 2018-08-28
基金项目: 福建省中青年教师教育科研项目(JT180619)
作者简介: 冯清(1982-),女,福建平潭人,讲师,硕士,研究方向:代数表示论。

想之间的关系，即

定理 1.5 设 $\Im$ 为小范畴，$\Re$ 为加法范畴，若 I 是 $\Re$ 中的理想，则 $\tilde{I}=\{i=\{i_x\}_{x\in \mathrm{ob}C}\mid i_x\in I\}$ 是范畴 $\Re^{\Im}$ 的理想。反之，若 $\tilde{J}$ 是范畴 $\Re^{\Im}$ 的理想，则 $J=\{j_x\mid j=\{j_x\}_{x\in \mathrm{ob}C}\in\tilde{J}\}$ 是范畴 $\Re$ 的理想。

证明 先证明 $\tilde{I}$ 是范畴 $\Re^{\Im}$ 的理想，这是因为

(1) 设 $\lambda:L_1\to L_2$，$\pi:L_1\to L_2$ 是 $\tilde{I}$ 中态射，则对任意 $a\in \mathrm{ob}\Im$ 有 $\lambda_a\in I$，$\pi_a\in I$，所以 $\lambda_a+\pi_a\in I$，从而 $\lambda+\pi=\{\lambda_a\}_{a\in \mathrm{ob}C}+\{\pi_a\}_{a\in \mathrm{ob}C}=\{\lambda_a+\pi_a\}_{a\in \mathrm{ob}C}\in\tilde{I}$。

(2) 设 $\lambda\in\tilde{I}$，$\xi\in \mathrm{mor}\Re^{\Im}$，$\zeta\in \mathrm{mor}\Re^{\Im}$，其中 $\lambda:L_1\to L_2$，$\xi:L_0\to L_1$，$\zeta:L_2\to L_3$，则对任意 $a\in \mathrm{ob}C$ 有 $\lambda_a\in I$，$\xi_a\in \mathrm{mor}\Re$，$\zeta_a\in \mathrm{mor}\Re$ 所以有 $\lambda_a\xi_a\in I$，$\zeta_a\lambda_a\in I$，从而

$\lambda\xi=\{(\lambda\xi)_a\}_{a\in \mathrm{ob}C}=\{\lambda_a\xi_a\}_{a\in \mathrm{ob}C}\in\tilde{I}$，$\zeta\lambda=\{(\zeta\lambda)_a\}_{a\in \mathrm{ob}C}=\{\zeta_a\lambda_a\}_{a\in \mathrm{ob}C}\in\tilde{I}$。

所以如上定义的 $\tilde{I}$ 是 $\Re^{\Im}$ 的理想。

再证 J 是范畴 $\Re$ 的理想，这是因为

(1) 设 $m:P\to Q$，$n:P\to Q$ 是 J 中态射，定义

$L_P:\Im\to\Re$；$a\mapsto P$；$l:a\to b\mapsto 1_P:P\to P$，

$M_Q:\Im\to\Re$；$a\mapsto Q$；$f:a\to b\mapsto 1_Q:Q\to Q$，

再定义 $\lambda:L_P\to M_Q$，$\pi:L_P\to M_Q$，$\lambda=\{\lambda_a\}_{a\in \mathrm{ob}\Im}$，$\pi=\{\pi_a\}_{a\in \mathrm{ob}\Im}$，对任意 $a\in \mathrm{ob}\Im$，均取 $\lambda_a=m$，$\pi_a=n$（即对任意 $a\in \mathrm{ob}\Im$，$b\in \mathrm{ob}\Im$ 有 $\lambda_a=\lambda_b=m$，$\pi_a=\pi_b=n$）。此时对范畴 $\Im$ 中任意态射 $l:a\to b$ 有 $1_Q\lambda_a=1_Qm=m=m1_P=\lambda_B1_P$，$1_Q\pi_a=1_Qn=n=n1_P=\pi_b1_P$，故 $\lambda\in \mathrm{mor}\Re^{\Im}$，$\pi\in mor\Re^{\Im}$。因 $m\in J$，$n\in J$，所以 $\lambda\in\tilde{J}$，$\pi\in\tilde{J}$，从而 $\lambda+\pi\in\tilde{J}$。再由

$\lambda+\pi=\{\lambda_a+\pi_a\}_{a\in \mathrm{ob}\Im}=\{\mathrm{m}+\mathrm{n}\}_{a\in ob\Im}$ 知 $m+n\in J$。

(2) 设 $m\in J$，$u\in mor\Re$，$v\in mor\Re$，其中 $m:P\to Q$，$u:Q\to R$，$v:O\to P$。

同 L_P，M_Q，可定义范畴 $\Re^{\Im}$ 中对象 N_R，T_O，同 λ，π，可定义范畴 $\Re^{\Im}$ 中态射

$\xi:M_Q\to N_R$，$\zeta:T_O\to L_P$。由 $\tilde{J}$ 是 $\Re^{\Im}$ 中的理想知 $\xi\lambda\in\tilde{J}$，$\lambda\zeta\in\tilde{J}$，又

$\xi\lambda=\{(\xi\lambda)_a\}_{a\in \mathrm{ob}\Im}=\{\xi_a\lambda_a\}_{a\in ob\Im}=\{\mathrm{um}\}_{x\in obC}$，$\lambda\zeta=\{(\lambda\zeta)_a\}_{a\in \mathrm{ob}\Im}=\{\lambda_a\zeta_a\}_{a\in \mathrm{ob}\Im}=\{\mathrm{mv}\}_{a\in ob\Im}$，所以 $um\in J$，$mv\in J$。

所以如上定义的 J 是 $\Re$ 的理想。

2 回路范畴的理想

H.Bass 在文[4]中引入了回路范畴，并证明了对环 R 有 $K_1(R)\cong K_1(f\cdot g\cdot P_R\mu)\cong K_0(\Omega f\cdot g\cdot P_R\mu)$．紧接着文[5]利用 Abel 范畴上的 Recollements 构造出其回路范畴上的 Recollements. 文[6]进一步讨论回路范畴与范畴的平凡扩张、冲积范畴之间的交换关系，并给出应用。本节讨论回路范畴 $\Omega\Re$ 的理想与范畴 $\Re$ 的理想之间的关系。

先给出回路范畴的定义，具体参见文[4-5]。

定义2.1 [4] 设 $\Re$ 是范畴，定义回路范畴 $\Omega\Re$ 如下：$\Omega\Re$ 的对象为 (P,λ)，其中 $P\in \mathrm{ob}\Re$，$\lambda\in \mathrm{Aut}(P)$．$\Omega\Re$ 的态射 $\varphi:(P,\lambda)\to(Q,\pi)$ 指的是范畴 D 中的态射 $\varphi:P\to Q$ 满足 $\pi\varphi=\varphi\lambda$。合成是自然的。

引理2.2 [5] 设 $\Re$ 是加法范畴，则回路范畴 $\Omega\Re$ 是加法范畴。

下面给出回路范畴 $\Omega\Re$ 的理想与范畴 $\Re$ 的理想之间的关系，即

定理 2.3 设 $\Re$ 是加法范畴，I 是 $\Re$ 的理想，则 $\Omega I=\{\varphi\in mor\Omega\Re\mid\varphi\in \mathrm{I}\}$ 是 $\Omega\Re$ 的理想。反之，设 ΩJ 是 $\Omega\Re$ 的理想，则 $J=\{\psi\in mor\Re\mid\psi\in\Omega \mathrm{J}\}$ 是 $\Re$ 的理想。

证明 先证明 ΩI 是 $\Omega\Re$ 的理想，这是因为：(1) 设 $\varphi_1:(P,\lambda)\to(Q,\pi)$，$\varphi_1':(P,\lambda)\to(Q,\pi)$ 是 ΩI 中态射，由 ΩI 的定义知 $\varphi_1\in I$，$\varphi_1'\in I$，所以 $\varphi_1+\varphi_1'\in I$，又 φ_1，φ_1' 为 $\Omega\Re$ 中的态射，从而 $\varphi_1+\varphi_1'\in\Omega I$。(2) 设 $\varphi_1\in\Omega I$，$\varphi_2\in mor\Omega\Re$，$\varphi_3\in mor\Omega\Re$，其中 $\varphi_1:(P,\lambda)\to(Q,\pi)$，$\varphi_2:(Q,\pi)\to(R,\xi)$，$\varphi_3:(O,\zeta)\to(P,\lambda)$。所以有 $\varphi_1\in I$，$\varphi_2\in mor\Re$，$\varphi_3\in mor\Re$，从而 $\varphi_2\varphi_1\in I$，$\varphi_1\varphi_3\in I$，又 $\varphi_2\varphi_1$，$\varphi_1\varphi_3$ 为 $\Omega\Re$ 中的态射，所以 $\varphi_2\varphi_1\in\Omega I$，$\varphi_1\varphi_3\in\Omega I$。故如上定义的 ΩI 是 $\Omega\Re$ 的理想。

再证 J 是 $\Re$ 的理想，这是因为：(1) $\psi_1:P\to Q$，$\psi_1':P\to Q$ 是 J 中态射，则可以诱导出范畴 $\Omega\Re$ 中的态射 ψ_1，ψ_1'，其中 ψ_1: $(P,1_P)\to(Q,1_Q)$，ψ_1': $(P,1_P)\to(Q,1_Q)$。所以 $\psi_1\in\Omega J$，$\psi_1'\in\Omega J$，从而 $\psi_1+\psi_1'\in\Omega J$，即 ψ_1+

$\psi_1' \in J$。(2)设 $\psi_1 \in J$，$\psi_2 \in mor\mathfrak{R}$，$\psi_3 \in mor\mathfrak{R}$，其中 $\psi_1: P \to Q$，$\psi_2: Q \to R$，$\psi_3: O \to P$，则可以诱导出范畴 $\Omega\mathfrak{R}$ 中的态射 ψ_2，ψ_3，其中 $\psi_2: (Q, 1_Q) \to (R, 1_R)$，$\psi_3: (O, 1_O) \to (P, 1_P)$。所以 $\psi_2 \in \Omega J$，$\psi_3 \in \Omega J$，从而 $\psi_2\psi_1 \in \Omega J$，$\psi_1\psi_3 \in \Omega J$，即 $\psi_2\psi_1 \in J$，$\psi_1\psi_3 \in J$。故如上定义的 J 是 $\mathfrak{R}$ 的理想。

3 推出范畴的理想

拉回与推出，又称为纤维积与纤维余积，是范畴论中两个重要的对偶概念。文[7]将推出提升至范畴的层面，定义了推出范畴，并给出一系列的结论。本节讨论推出范畴 $\mathfrak{R}^o$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想之间的关系。

先给出推出、推出范畴的定义，具体参见文[7]。

定义3.1[7] 设 $\mathfrak{R}$ 是范畴，$P_0 \in \mathrm{ob}\mathfrak{R}$，$P_1 \in \mathrm{ob}\mathfrak{R}$，$P_2 \in \mathrm{ob}\mathfrak{R}$，$l_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_i)$ ($i = 1,2$)，若对 $\mathfrak{R}$ 中对象 P_0' 及 $\mathfrak{R}$ 中态射 $l_i: P_i \to P_0'$ ($i = 1,2$) 有 $l_1'l_1 = l_2'l_2$；且对 $\mathfrak{R}$ 中任意对象 R 及 $\mathfrak{R}$ 中任意态射 $m_i: P_i \to R$ ($i = 1,2$)，若满足 $m_1l_1 = m_2l_2$，则存在唯一的态射 n 满足 $m_i = nl_i'$ ($i = 1, 2$)。则称 (P_0', l_1', l_2') 是态射对 $\{l_1, l_2\}$ 的推出，记为 $(P_0, l_1, l_2; P_0', l_1', l_2')$。

定义3.2[7] 设 $\mathfrak{R}$ 是范畴，$(P_0, l_1, l_2; P_0', l_1', l_2')$ 和 $(Q_0, m_1, m_2; Q_0', m_1', m_2')$ 是 $\mathfrak{R}$ 中的两个推出，从 $(P_0, l_1, l_2; P_0', l_1', l_2')$ 到 $(Q_0, m_1, m_2; Q_0', m_1', m_2')$ 的推出态射是指 $\lambda^o = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \lambda_0'\}$。其中 $\lambda_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathrm{P_i}, \mathrm{Q_i})$ ($i = 0,1,2$)，$\lambda_0' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathrm{P}_0', \mathrm{Q}_0')$ 满足 $l_i\lambda_i = \lambda_0 m_i$，$\lambda_i m_i' = l_i\lambda_0'$ ($i = 1,2$)。

定义3.3[7] 设 $\mathfrak{R}$ 是范畴，$\mathfrak{R}$ 的推出范畴 $\mathfrak{R}^o$ 是以 $\mathfrak{R}$ 中的推出为对象，推出态射为态射构成的范畴。

引理3.4[7] 设 $\mathfrak{R}$ 为加法范畴，则推出范畴 $\mathfrak{R}^o$ 是加法范畴。

下面给出推出范畴 $\mathfrak{R}^o$ 的理想与范畴 $\mathfrak{R}$ 的理想之间的关系，即

定理 3.5 设 $\mathfrak{R}$ 是加法范畴，I 是 $\mathfrak{R}$ 的理想，$\lambda^o = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \lambda_0'\}$ 为 $\mathfrak{R}^o$ 中态射。对 $\mathfrak{R}$ 中态射 a，若 $\lambda_0' a \in I$ 有 $\lambda_0' \in I$，则 $I^o = \{\lambda^o = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \lambda_0'\} \in mor\mathfrak{R}^o \mid \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{I}\}$ 是 $\mathfrak{R}^o$ 的理想。

证明 首先说明若 $\lambda_0 \in I$，$\lambda_1 \in I$，$\lambda_2 \in I$，则诱导的态射 $\lambda_0' \in I$。这是因为，由 $\lambda^o = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \lambda_0'\}$ 为 $\mathfrak{R}^o$ 中态射知 $\lambda_0' l_1' = m_1'\lambda_1$，又 $\lambda_1 \in I$，所以 $\lambda_0' l_1' = l_1'\lambda_1 \in I$，再由定理的条件得 $\lambda_0' \in I$。

接着证明 I^o 是 $\mathfrak{R}^o$ 的理想，这是因为

(1)设 $\lambda^o \in I^o$，$\pi^o \in I^o$，其中

λ^o：$(P_0, l_1, l_2; P_0', l_1', l_2') \to (Q_0, m_1, m_2; Q_0', m_1', m_2')$，

π^o：$(P_0, l_1, l_2; P_0', l_1', l_2') \to (Q_0, m_1, m_2; Q_0', m_1', m_2')$，

$\lambda^o = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \lambda_0'\}$，$\pi^o = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2; \pi_0'\}$，由 I^o 的定义知 $\lambda_i \in I$，$\pi_i \in I$ ($i = 0,1,2$) 且在定理的条件下有 $\lambda_0' \in I$，$\pi_0' \in I$，因 I 是理想，所以 $\lambda_i + \pi_i \in I$，$\lambda_0' + \pi_0' \in I$ ($i = 0,1,2$)，故 $\lambda^o + \pi^o = (\lambda_0 + \pi_0, \lambda_1 + \pi_1, \lambda_2 + \pi_2; \lambda_0' + \pi_0') \in I^o$.

(2)设 $\lambda^o = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \lambda_0'\} \in I^o$，$\xi^o = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2; \xi_0'\} \in mor\mathfrak{R}^o$，

$\zeta^o = \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2; \zeta_0'\} \in mor\mathfrak{R}^o$，其中

λ^o：$(P_0, l_1, l_2; P_0', l_1', l_2') \to (Q_0, m_1, m_2; Q_0', m_1', m_2')$，

ξ^o：$(Q_0, m_1, m_2; Q_0', m_1', m_2') \to (R_0, u_1, u_2; R_0', u_1', u_2')$，

ζ^o：$(O_0, v_1, v_2; O_0', v_1', v_2') \to (P_0, l_1, l_2; P_0', l_1', l_2')$。

则 $\lambda_i \in I$，$\lambda_0' \in I$，$\xi_i \in mor\mathfrak{R}$，$\zeta_i \in mor\mathfrak{R}$，$\xi_0' \in mor\mathfrak{R}$，$\zeta_0' \in mor\mathfrak{R}$ ($i = 0,1,2$)，由 I 是 $\mathfrak{R}$ 的理想得 $\xi_i\lambda_i \in I$，$\lambda_i\zeta_i \in I$，$\xi_0'\lambda_0' \in I$，$\lambda_0'\zeta_0' \in I$ ($i = 0,1,2$)，所以

$\xi^o\lambda^o = (\xi_0\lambda_0, \xi_1\lambda_1, \xi_2\lambda_2; \xi_0'\lambda_0') \in I^o$，$\lambda^o\zeta^o = (\lambda_0\zeta_0, \lambda_1\zeta_1, \lambda_2\zeta_2; \lambda_0'\zeta_0') \in I^o$。

故如上定义的 I^o 是 $\mathfrak{R}^o$ 的理想。

参考文献：

[1] STREET R. Ideals, radicals, and structure of additive categories[J]. Applied Categorical Structures, 1995(3): 139-149.
[2] 冯清, 江维, 陈清华. 范畴的中心及其应用[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2014, 30(5): 9-22.
[3] 冯清, 陈清华. 函子范畴与范畴的平凡扩张[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2013(1): 133-136.

[4] BASS H. Algebraic K-theory [M]. New York: Benjamin, 1968.
[5] 张锦州. 范畴局部化与回路范畴的若干问题研究及应用[D]. 福州: 福建师范大学, 2012.
[6] 冯清, 李长安. 回路范畴的平凡扩张与冲积[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2015, 35(4): 1-5.
[7] 沈倩芳. 推出范畴的性质[D]. 武汉: 华中师范大学, 2006.

(责任编辑: 陈雯)

(上接第 577 页)

[10] 和萍, 文福拴, 薛禹胜, 等. 不同类型风电机组对小干扰和暂态稳定性的影响[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(17): 23-29.
[11] 杨琦, 张建华, 李卫国. 电力系统接入风电场后的暂态稳定分析[J]. 高电压技术, 2009, 35(8): 2042-2047.
[12] 叶瑞丽, 刘瑞叶, 刘建楠, 等. 直驱风电机组风电场接入后的电力系统暂态稳定计算[J]. 电工技术学报,2014, 29(6): 211-218.
[13] 秦文萍, 任琛, 韩肖清, 等. 考虑负荷波动极限的电力系统电压稳定性风险评估[J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(16): 4102-4111.
[14] 白杨, 王鹏, 韩肖清, 等. 基于负荷不确定性建模的静态电压稳定性风险评估[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(13): 3470-3478.
[15] 卢锦玲, 徐超, 程晓悦, 等. 基于 DFIG 的变速风电机组对系统暂态稳定影响[J]. 电力系统及其自动化学报, 2016, 39(10): 2780 -2786.

(特约编辑:黄家瑜)